Aufgabe 1: Lineare Einkommensteuer mit Grundfreibetrag

Gegeben sei eine Einkommensteuer mit folgendem Steuertarif *T(Y):*

$$T(Y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le Y \le e \\ \tau(Y - e) & \text{für} \quad e < Y \end{cases}$$

Dabei bezeichnen Y das Bruttoeinkommen, e den Grundfreibetrag und $\tau(0 < \tau < 1)$ den Steuersatz.

a) Erläutern Sie den angegebenen Steuertarif und stellen Sie ihn graphisch dar.

b) Prüfen Sie, ob der angegebene Steuertarif für $Y > e$ progressiv ist, wenn man als Kriterium
   - die Änderung des Grenzsteuersatzes
   - die Residualeinkommenselastizität

   zugrunde legt.

c) Betrachten Sie einen Haushalt, dessen Arbeitsleistung mit einem festen Lohnsatz pro Zeiteinheit entlohnt wird und der neben seinem Lohneinkommen keine weiteren Einkünfte hat. Nehmen Sie an, das Preisniveau sei konstant und auf eins normiert. Bestimmen Sie für den gegebenen Steuertarif die Budgetbeschränkung des Haushalts. Stellen Sie die Budgetbeschränkung im Realeinkommen-Freizeit-Diagramm dar und erläutern Sie ihre Eigenschaften.

d) Um den Steuertarif den Erfordernissen des Existenzminimums anzupassen, plant die Regierung die Anhebung des Grundfreibetrages; der Steuersatz soll nicht geändert werden. Nehmen Sie an, die Präferenzen eines repräsentativen Haushalts bezüglich seines Realeinkommens *y* und seiner Freizeit *F* ließen sich durch die Nutzenfunktion

   $$U(y, F) = y\,F$$

   beschreiben.

   Ermitteln Sie algebraisch, wie sich eine Erhöhung des Grundfreibetrages auf das Arbeitsangebot des Haushalts auswirkt. Stellen Sie Ihr Ergebnis im *(y,F)*-Raum dar, und interpretieren Sie es ökonomisch.

e) Zeigen Sie algrabraisch, wie sich eine Erhöhung des Steuersatzes auf das Arbeitsangebot auswirkt.

   Gehen Sie in den Aufgabenteilen d) und e) stets davon aus, daß $w\,h > e$ *ist.*

<u>Aufgabe 2: Slutsky-Zerlegung</u>

Gegeben sei das in Aufgabe 1 beschriebene Modell. D.h. der Haushalt habe eine Nutzenfunktion der Form $U(y,F) = y\,F$, und der Steuertarif sei

$$T(Y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le Y \le e \\ \tau(Y-e) & \text{für} \quad e < Y \end{cases}$$

Die gewöhnliche Arbeitsangebotsfunktion läßt sich schreiben:

$$h^*(w_n, m) = \frac{Z}{2} - \frac{m}{2\,w_n}$$

wobei $w_n = (1-\tau)\,w$ und $m = \tau\, e$.

a) Formulieren Sie das zugehörige Ausgabenminimierungsproblem des Haushalts und leiten Sie daraus die kompensierte Arbeitsangebotsfunktion $h^+(w_n, U)$ ab.

b) Bilden Sie die Slutsky-Zerlegung des Effekts einer Änderung des Netto-Lohnsatzes auf das Arbeitsangebot.

c) Bilden Sie die Slutsky-Zerlegung des Effekts einer Änderung des Steuersatzes auf das Arbeitsangebot. Verwenden Sie dazu das unter b) abgeleitete Ergebnis.

   Geben Sie die Einkommenseffekte der Steuersatzänderung an.

Aufgabe 3:Preis- und Mengeneffekte von Verbrauchsteuern

Die Regierung eines Landes plant die Reform der Mineralölsteuer. Sie überlegt, ob sie die Steuer als Mengen- oder Wertsteuer ausgestalten sollte.

a) Angenommen, auf dem Mineralölmarkt herrsche vollkommener Wettbewerb. Im Fall einer Mengensteuer *t* gilt

$$p(x) = q(x) + t$$

wobei *p(x)* den Verbraucherpreis und *q(x)* den Erzeugerpreis jeweils als Funktion der Menge *x* angibt. Es gelte $p'(x) < 0$ und $q'(x) > 0$.

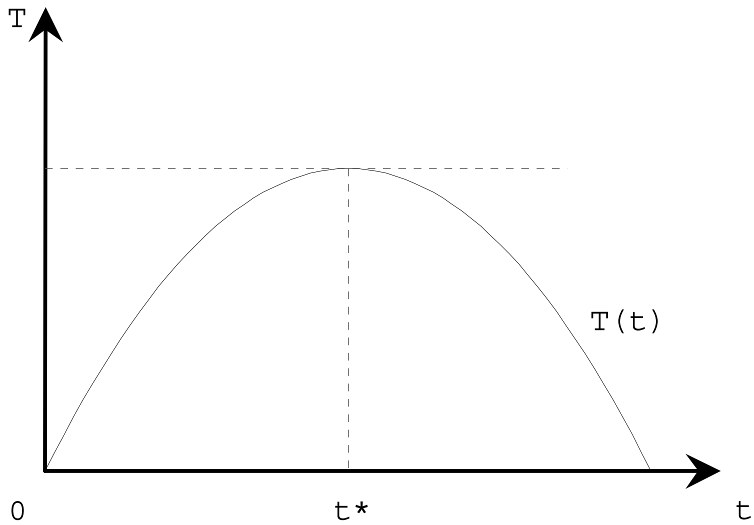
Zeigen Sie, daß sich für gegebenes *t* eine Wertsteuer mit dem Satz τ finden läßt, die zu den gleichen Marktergebnissen und zum gleichen Steueraufkommen führt wie die Mengensteuer *t.*

b) Nehmen Sie an, auf dem Markt für Mineralöl gebe es nur einen einzigen Anbieter. Die Preis-Absatzfunktion des Monopolisten sei *p(x)* mit $p'(x) < 0$. Seine Kostenfunktion sei *C(x)* mit $C'(x) > 0$, $C''(x) > 0$.

Zeigen Sie, daß sich für eine gegebene Mengensteuer *t* eine bezüglich *x* und *p* äquivalente Wertsteuer τ finden läßt, die zu einem höheren Steueraufkommen führt als die Mengensteuer.

c) Der Mineralölverbrauch werde mit einer Mengensteuer belegt. Die Absatzbedingungen des monopolistischen Anbieters werden durch die Funktion $p = a - b\,x$ beschrieben; seine Kostenfunktion ist $C(x) = c\,x$, $c > 0$. Das Steueraufkommen wird bestimmt durch $T(t) = t\,x(t)$, wobei $x(t)$ die gewinnmaximale Produktionsmenge des Monopolisten als Funktion des Steuersatzes angibt.

- Ermitteln Sie den Steuersatz, der das Steueraufkommen maximiert. Bei welchen Steuersätzen wird das Steueraufkommen Null? Erläutern Sie, weshalb die Funktion $T(t)$ im Prinzip folgende Form aufweist:



- t* sei derjenige Steuersatz, der das Steueraufkommen maximiert. In der Ausgangslage sei $t^0 < t^*$. Wie werden sich Menge und Verbraucherpreis ändern, wenn die Regierung den Steuersatz so variiert, daß sie nach erfolgter Steueränderung mit einem höheren Steueraufkommen rechnen kann? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Äquivalente und kompensierende Variation, Konsumentenrente und Zusatzlast

Ein Konsument beziehe ein festes Einkommen $I = 100\ DM$, das er für zwei Konsumgüter ausgeben kann. Seine (quasilineare) Nutzenfunktion habe die Form

$$U(x_1, x_2) = 2\ x_1 - \frac{1}{2}\ x_1^2 + x_2$$

wobei x_i die Verbrauchsmenge des i-ten Konsumgutes bezeichnet.

In der Ausgangslage ohne Steuern beträgt der Preis des Gutes 1, $p_1 = 0{,}25\ DM$, und der Preis des Gutes 2, $p_2 = 1\ DM$.

a) Leiten Sie für obige Nutzenfunktion die gewöhnlichen und kompensierten Nachfragefunktionen, die indirekte Nutzenfunktion sowie die Ausgabenfunktion ab. (Hinweis: Berücksichtigen Sie dabei von vornherein $p_2 = 1$.)

b) Eine Verbrauchsteuer auf Gut 1 erhöhe den Preis dieses Gutes auf 1 DM. Berechnen Sie mit Hilfe der Ausgabenfunktion die kompensierende und die äquivalente Variation der Preiserhöhung.

   Welche Besonderheit stellen Sie fest, und worauf läßt sich diese zurückführen?

c) Um welchen Betrag ändert sich aufgrund der Preiserhöhung für Gut 1 die Marshallsche Konsumentenrente?

   Begründen Sie kurz, weshalb die Änderung der Marshallschen Konsumentenrente bei der hier untertellten Nutzenfunktion ein exaktes Geldmaß des vom Konsumenten erlittenen Wohlfahrtsverlustes darstellt.

d) Der Erzeugerpreis des Gutes 1 sei konstant, und die Erhöhung des Verbraucherpreises dieses Gutes sei auf eine Mengensteuer zurückzuführen. Wie hoch ist die individuelle Zusatzlast der Steuer?

Aufgabe 5: Die Einführung einer differenzierten Mehrwertsteuer

*Im Kurs 00695 wurden die relativen Änderungen der Variablen durch ein * gekennzeichnet. In den beiden folgenden Aufgaben zu Steuerwirkungen in einem einfachen generellen Gleichgewichtsmodell übernehmen wir dagegen die Schreibweise, die sich in der Literatur durchgesetzt hat. Wir kennzeichnen die relative Änderung einer Variablen, indem wir ein „Dach“ ($\hat{\ }$) über die betreffende Größe setzen; z.B. ist* $\hat{x} = dx / x$.

In einer Ökonomie mit zwei Sektoren, Sektor „Industrie“ *(M)* und Sektor „Landwirtschaft“ *(F)*, und zwei Produktionsfaktoren, Arbeit *(L)* und Kapital *(K)*, soll eine Mehrwertsteuer eingeführt werden, die wie folgt ausgestaltet sei: Der Sektor *F* werde mit dem Steuersatz t_F und der Sektor M werde mit dem höheren Steuersatz $t_M = t_F + \alpha,\ \ \alpha > 0$ belegt. Die Steuern werden als Wertsteuer erhoben; Bemessungsgrundlage sind die Erzeugerpreise der Güter, p_M und p_F .

a) Fügen Sie die Steuer in das Zwei-Güter-zwei-Faktoren-Modell einer geschlossenen Wirtschaft ein.

b) Ermitteln Sie die durch die Mehrwertsteuer bewirkten Änderungen
- der Verteilungsrelation
- des Verhältnisses der Erzeugerpreise
- des Verhältnisses der Verbraucherpreise
- der Produktionsstruktur .

c) Interpretieren Sie die unter b) abgeleiteten Ergebnisse ökonomisch.

Aufgabe 6: Einführung einer Lohnsteuer mit einheitlichem Steuersatz

Gegeben sei das Modell einer geschlossenen Volkswirtschaft mit zwei Sektoren, Industrie und Landwirtschaft, und zwei Faktoren, Arbeit und Kapital.

a) Es werde eine Lohnsteuer mit für beide Sektoren gleichem Steuersatz eingeführt. Zeigen Sie algebraisch, wie sich diese Maßnahme auf
   - das Faktorpreisverhältnis
   - die Produktionsstruktur und
   - das Güterpreisverhältnis

   auswirkt.

b) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse ökonomisch.

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei!

Lösung zur Aufgabe 1

a)

Solange sein Bruttoeinkommen den Wert *e* nicht übersteigt, zahlt ein Haushalt keine Steuer. Falls sein Bruttoeinkommen größer als *e* ist, zahlt er einen festen Anteil τ seines um den Grundfreibetrag *e* verminderten Bruttoeinkommens an den Fiskus.

b)

Der Grenzsteuersatz ist $T'(Y) = \tau$ für $Y > e$ und damit eine Konstante. Bezüglich dieses Kriteriums wäre der Tarif für $Y > e$ *nicht* progressiv.

Das Nettoeinkommen beträgt $Y - T(Y)$, und die Residualeinkommenselastizität ist definiert als

$$\varepsilon_{Y_n,Y} \equiv \frac{d\left[Y - T(Y)\right]}{dY} \cdot \frac{Y}{\left[Y - T(Y)\right]}$$

$$= \frac{1 - T'(Y)}{1 - \frac{T(Y)}{Y}}$$

Für $Y > e$ beträgt der Durchschnittssteuersatz

$$\frac{T(Y)}{Y} = \tau\left(1 - \frac{e}{Y}\right)$$

Es gilt $T(Y)/Y < \tau$ und somit $\varepsilon_{Y_n,Y} < 1$. Nach dem Kriterium der Residualeinkommenselastizität ist der Steuertarif progressiv.

c)

Es gilt $y = Y - T(Y)$ und $Y = w(Z - F)$, wobei Z die verfügbare Gesamtzeit bezeichnet. Für $0 \leq Y \leq e$ ist $T = 0$, so daß $y = w(Z - F)$. Für $Y > e$ gilt:

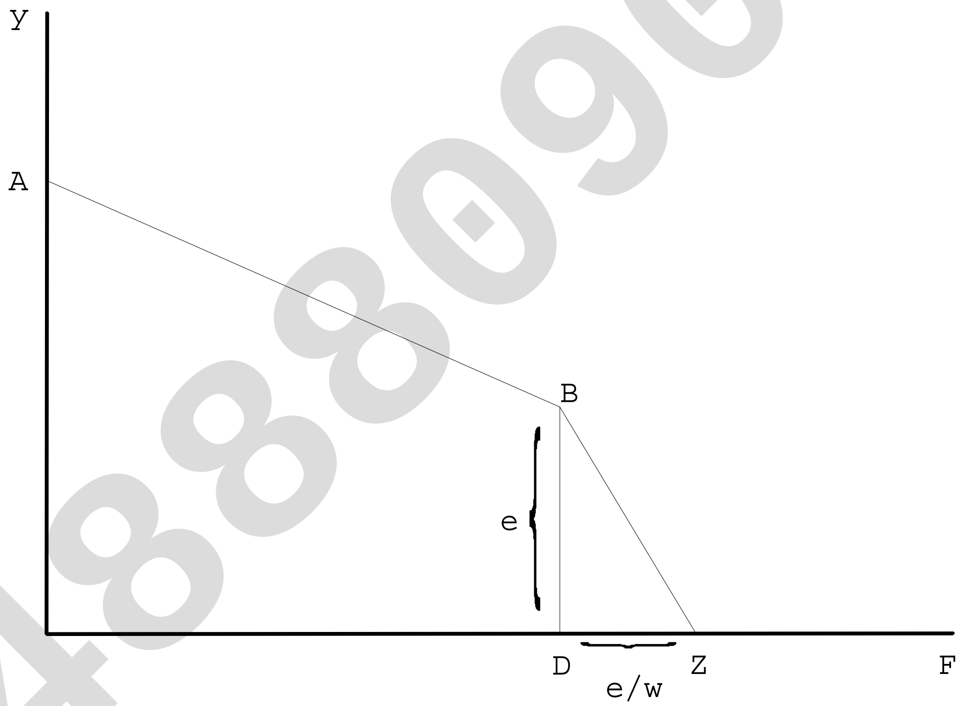
$$y = Y - \tau(Y - e) = (1 - \tau)Y + \tau e$$

$$=(1-\tau)w(Z-F)+\tau e$$

Zusammengefaßt lautet die Budgetbeschränkung:

$$y=\begin{cases}(1-\tau)w(Z-F)+\tau e & \text{für} \quad F<Z-\dfrac{e}{w}\\ w(Z-F) & \text{für} \quad F\geq Z-\dfrac{e}{w}\end{cases}$$

Die Budgetbeschränkung besteht also, wie in der nachstehenden Abbildung gezeichnet, aus den beiden linearen Teilstücken *AB* und *BZ*. Die Steigung des Teilstücks *AB* beträgt $-(1-\tau)w$, und die Steigung des Teilstücks *BZ* beträgt - *w*. Der Knickpunkt *B* hat die Koordinaten *F* = *Z* - *(e/w)* und *y* = *e* .



d)
Wir gehen vom Nutzenmaximierungsproblem des Haushalts aus. Annahmegemäß ist das für den Haushalt relevante Teilstück der Budgetbeschränkung dasjenige, welches durch $y=(1-\tau)w(Z-F)+\tau e$ angegeben wird. (Die Präferenzen des Haushalts, die Steuer und der Lohn sind derart, daß es für jeden Punkt auf dem Teilstück *BZ* Punkte auf dem Teilstück *AB* der Budgetbeschränkung gibt, die der Haushalt diesem Punkt vorzieht.) Zur Charakterisierung eines Nutzenmaximums maximieren wir die Lagrange-Funktion

$$L=y\cdot F+\lambda\left[(1-\tau)w(Z-F)+\tau e-y\right]$$

bezüglich *y*, *F* und λ. Als notwendige Bedingungen erster Ordnung für ein inneres Maximum erhält man

(1) $$\frac{\partial L}{\partial y}=F-\lambda=0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial F} = y - \lambda\,(1-\tau)\,w = 0$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (1-\tau)\,w\,(Z-F) + \tau\,e - y = 0$$

Aus (1) und (2) folgt

(4) $$y = (1-\tau)\,w\,F = (1-\tau)\,w\,(Z-h)$$

wobei $h = Z - F$ die Arbeitszeit des Haushalts ist. Die Budgetbeschränkung läßt sich schreiben als

(5) $$y = (1-\tau)\,w\,h + \tau\,e$$

Aus (4) und (5) erhalten wir

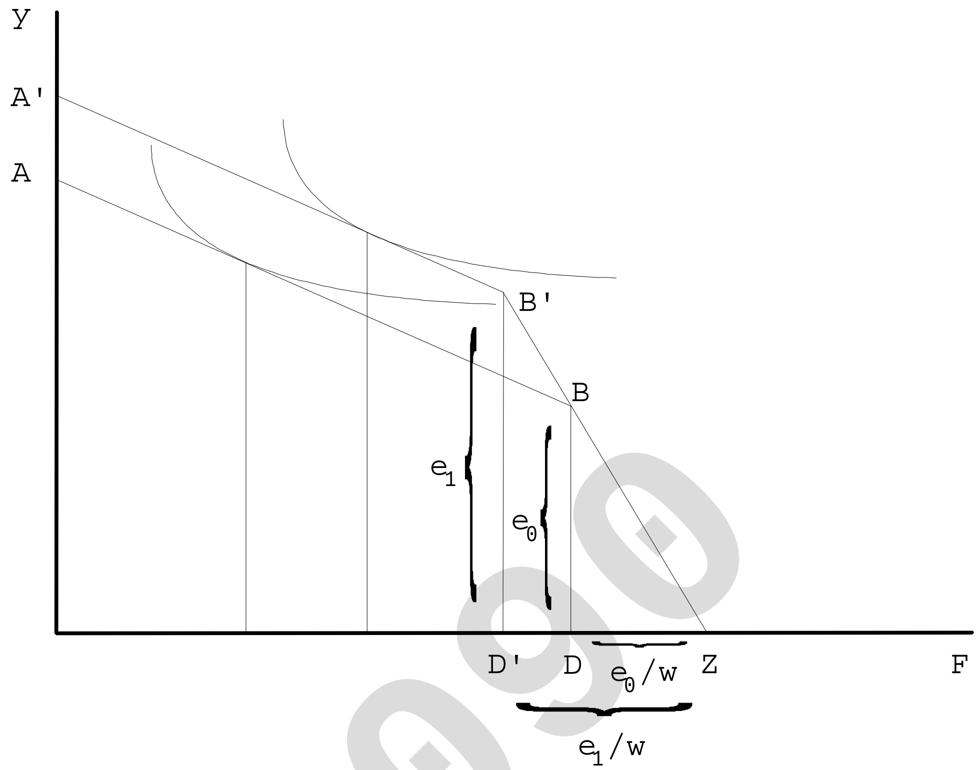
$$2(1-\tau)\,w\,h = (1-\tau)\,w\,Z - \tau\,e$$

und

(6) $$h = \frac{Z}{2} - \frac{\tau\,e}{2(1-\tau)\,w}$$

Wie aus (6) ersichtlich ist, sinkt *h*, wenn *e* erhöht wird. D.h. eine Erhöhung des Grundfreibetrages bewirkt, daß der Haushalt seine Arbeitszeit reduziert.

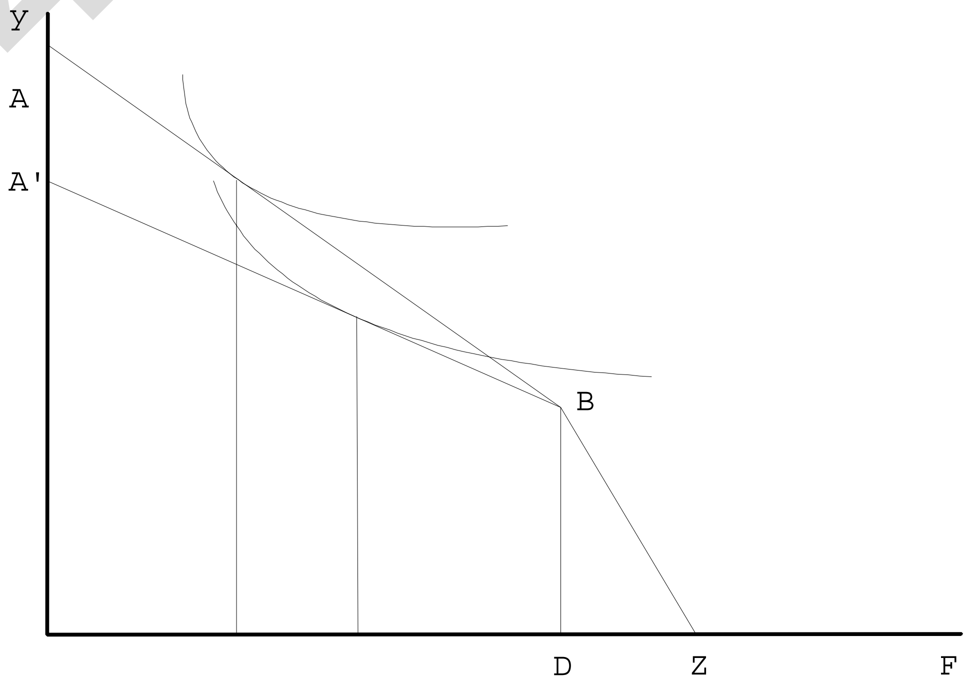
In der folgenden Abbildung wird das Resultat graphisch dargestellt. Durch die Erhöhung des Grundfreibetrages von e_0 auf e_1 verlagert sich das flachere Teilstück der Budgetbeschränkung nach oben, und gleichzeitig wird dieses Teilstück kürzer (die Strecke *A'B'* ist kleiner als die Strecke *AB*). Die Steigung beider Teilstücke bleibt unverändert, da der Steuersatz τ und der Lohnsatz konstant bleiben. Ökonomisch bedeutet dies, daß die Erhöhung des Grundfreibetrages keinen Substitutionseffekt, sondern lediglich einen Einkommenseffekt auslöst. Die Nutzenfunktion des Haushalts ist derart, daß von beiden Gütern (Freizeit und Realeinkommen) mehr nachgefragt wird, wenn sich die Budgetbeschränkung parallel nach oben verschiebt: beide Güter sind „normale" Güter. Eine erhöhte Nachfrage nach dem Gut Freizeit ist jedoch gleichbedeutend mit einem Rückgang des Arbeitsangebotes.



e)
Gleichung (6) bestimmt das Arbeitsangebot als Funktion des Lohnsatzes, des Steuersatzes und des Grundfreibetrages, $h = h(w, \tau, e)$. Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = -e\,\frac{w(1-\tau)+w\tau}{2\,w^2\,(1-\tau)^2} = -\frac{e}{2\,w(1-\tau)^2} < 0$$

Eine Erhöhung des Steuersatzes bewirkt, daß der Haushalt sein Arbeitsangebot reduziert.
Graphisch ergibt sich folgendes Bild:



Durch die Anhebung des Steuersatzes wird die Steigung des flacheren Teilstücks der Budgetbeschränkung absolut kleiner. Ökonomisch bedeutet dies, daß das Gut Freizeit relativ billiger wird. Dies löst einen Substitutionseffekt aus, der auf eine erhöhte Nachfrage nach Freizeit (eine Reduzierung des Arbeitsangebotes) hinwirkt. Daneben gibt es einen Einkommenseffekt, der auf eine Reduktion der Freizeit (eine Erhöhung des Arbeitsangebotes) hinwirkt. Per Saldo überwiegt im hier betrachteten Fall der Substitutionseffekt den Einkommenseffekt, so daß der Gesamteffekt der Steuersatzerhöhung auf das Arbeitsangebot negativ ist.

Lösung zur Aufgabe 2

a)
Im vorliegenden Fall läßt sich $m = \tau e$ als Komponente des Haushaltseinkommens nach Steuer interpretieren, die unabhängig von der Höhe des Bruttolohnsatzes ist (sie ist abhängig vom Steuersatz und von der Höhe des Grundfreibetrages). Wir bezeichnen diese Komponente des Nettoeinkommens als lohnunabhängiges Einkommen nach Steuer.

Das (fiktive) Ausgabenminimierungsproblem des Haushalts lautet: Wähle *y* und *h* so, daß das lohnunabhängige Einkommen nach Steuer minimal wird und wenigstens ein Nutzenniveau U^0 erreicht wird. Formal:

$$\min_{y,h} \quad y - w_n\, h$$
$$\text{u.d.N.} \quad (Z-h)\, y = U^0$$

Wir minimieren die zugehörige Lagrange-Funktion

$$L = y - w_n\, h + \mu \left[U^0 - y\,(Z-h)\right]$$

Als notwendige Bedingungen erster Ordnung für ein Ausgabenminimum mit $h > 0$ erhält man

(1) $$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \mu (Z-h) = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial h} = \mu\, y - w_n = 0$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial \mu} = U^0 - y\,(Z-h) = 0$$

Aus (1) und (2) folgt

(4) $$y = (Z-h)\, w_n$$

Einsetzen aus (3) für *y* in (4) ergibt

$$U^0 = (Z-h)^2 w_n$$
$$Z - h = \pm\sqrt{\frac{U^0}{w_n}}$$

Die negative Wurzel ist hier irrelevant, so daß folgt:

$$h = Z - \sqrt{U^0 / w_n}$$

Anstelle von U^0 kann ein beliebiger Wert von $U > 0$ vorgegeben werden. Die gesuchte einkommenskompensierte Arbeitsangebotsfunktion hat somit die Form

$$h^+ \,(w_n, U) = Z - \sqrt{U/w_n}$$

b)
Die Ausgabenfunktion ist definiert als

$$E\,(w_n, U) = \min_{y,h} \left\{ y - w_n\, h ; y\,(Z-h) = U \right\}$$

Setzen wir den Wert von U so fest, daß er dem bei gegebenem Steuertarif maximal erreichbaren Nutzenniveau $\overline{U}$ gleich ist, dann gilt

$$E\,(w_n, \overline{U}) = m$$

Wir erhalten die Identität

$$h^*(w_n, E\,(w_n, \overline{U})) = h^+\,(w_n, \overline{U})$$

Differenzierung nach w_n ergibt

$$\frac{\partial h^*}{\partial w_n} + \frac{\partial h^*}{\partial m}\,\frac{\partial E}{\partial w_n} = \frac{\partial h^+}{\partial w_n}$$

Berücksichtigt man

$$\frac{\partial E}{\partial w_n} = -h^+\,(w_n, \overline{U})$$

so folgt die Slutsky-Zerlegung

$$(5) \qquad \frac{\partial h^*}{\partial w_n} = \frac{\partial h^+}{\partial w_n} + h^+\,\frac{\partial h^*}{\partial m} \qquad , \qquad h^+ = h^*$$

Im hier betrachteten Fall ist

$$\frac{\partial h^+}{\partial w_n} = \frac{1}{2\,w_n}\sqrt{U^0/w_n} = \frac{Z-h}{2\,w_n}$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial m} = -\frac{1}{2\,w_n}$$

c)
Die gewöhnliche Arbeitsangebotsfunktion läßt sich bei gegebenem *w* als Funktion von τ und *e* schreiben:

$$h\,(\tau, e) = h^{*}\,(w_n\,(\tau), m\,(\tau, e))$$

wobei $w_n\,(\tau) = (1-\tau)\,w$ und $m\,(\tau, e) = \tau\, e$. Differenzieren nach τ ergibt

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial h^{*}}{\partial w_n}\,\frac{\partial w_n}{\partial \tau} + \frac{\partial h^{*}}{\partial m}\,\frac{\partial m}{\partial t} \tag{6}$$

Es gilt

$$\frac{\partial w_n}{\partial \tau} = -\,w$$

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} = e$$

Substituiert man diese Ausdrücke sowie (5) in (6), folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \tau} &= -\,w\left(\frac{\partial h^{+}}{\partial w_n} + h\,\frac{\partial h^{*}}{\partial m}\right) + e\,\frac{\partial h^{*}}{\partial m}\\ &= -\,w\,\frac{\partial h^{+}}{\partial w_n} - (w\,h - e)\,\frac{\partial h^{*}}{\partial m}\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Slutsky-Zerlegung einer Änderung des Steuersatzes τ auf das Arbeitsangebot. Wie die Gleichung zeigt, gibt es bei einem linearen Steuertarif mit Grundfreibetrag zwei gegenläufige Einkommenseffekte: zum einen den bekannten Effekt $-w\,h(\partial h^{*}/\partial m)$, der mit der Senkung des Nettolohnsatzes zusammenhängt. Er wirkt auf eine Senkung der Freizeit und damit auf eine Steigerung des Arbeitsangebotes hin. Der zweite Einkommenseffekt $e\,(\partial h^{*}/\partial m)$ auf das Arbeitsangebot ist negativ. Durch die Anhebung von τ steigt *m*, das lohnunabhängige Einkommen nach Steuer. Dies wirkt tendenziell auf eine vermehrte Freizeitnachfrage hin. Sofern $w\,h > e$ ist der erste Einkommenseffekt betragsmäßig größer als der zweite.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die gleichgewichtige Menge x^* bei einer Mengensteuer t wird determiniert durch

$$q\,(x^*) = p\,(x^*) - t$$

Gesucht ist der Satz τ einer Wertsteuer, bei der im Gleichgewicht die gleiche Menge und damit der gleiche Verbraucherpreis realisiert werden wie bei der Mengensteuer. Im Fall einer Wertsteuer wird die gleichgewichtige Menge $\hat{x}$ bestimmt durch

$$q\,(\hat{x}) = p\,(\hat{x}) - \tau\, p\,(\hat{x})$$

Damit $\hat{x} = x^*$ und damit $p\,(\hat{x}) = p\,(x^*)$, muß τ so gewählt werden, daß

$$\tau\, p\,(x^*) = t$$

Ist das der Fall, dann stimmt auch das Steueraufkommen in beiden Fällen überein, d.h.

$$\tau\, p\,(\hat{x})\,\hat{x} = t\, x^*$$

b) Das Gewinnmaximierungsproblem des Monopolisten im Fall der Mengensteuer lautet

$$\max_x \; R\,(x) - C\,(x) - t\,x$$

wobei *R(x) = xp(x)* die Bruttoerlösfunktion ist. Die gewinnmaximale Menge x^* erfüllt die Bedingung

$$R'\,(x^*) - t = C'\,(x^*)$$

Im Fall der Wertsteuer mit dem Satz τ maximiert der Monopolist

$$(1-\tau)\; R\,(x) - C\,(x)$$

wobei $(1-\tau)\; R\,(x) = (1-\tau)\; x\; p\,(x)$ der Nettoerlös nach Steuer ist. Im Gewinnmaximum $\hat{x}$ gilt

$$(1-\tau)\; R'\,(\hat{x}) = C'\,(\hat{x})$$

Wenn bei beiden Steuerformen die gleiche Menge angeboten werden soll $(x^* = \hat{x})$, dann muß gelten $C'\,(\hat{x}) = C'\,(x^*)$ und daher

$$(1-\tau)\; R'\,(\hat{x}) = R'\,(x^*) - t$$

Für $x^* = \hat{x}$ ist $R'(\hat{x}) = R'(x^*)$ und daher

$$t = \tau\, R'(x^*) = \tau \cdot p\,(x^*) \cdot \frac{R'(x^*)}{p\,(x^*)}$$

Das Steueraufkommen bei der Mengensteuer ist $t\,x^*$, während es bei einer bezüglich der Marktergebnisse äquivalenten Wertsteuer $\tau\, p\,(x^*)\, x^*$ beträgt. Da

$$\frac{\tau\, p\,(x^*)}{t} = \frac{p\,(x^*)}{R'(x^*)}$$

und bei fallender Preis-Absatzkurve $R'(x) < p\,(x)$ für $x > 0$ ist, folgt $\tau\, p\,(x^*) > t$. Damit ist gezeigt, daß eine gegebene Mengensteuer zu einem niedrigeren Steueraufkommen führt als eine bezüglich *x* und *p* äquivalente Wertsteuer.

c) Die Funktion *x(t)* wird implizit definiert durch die Bedingung erster Ordnung für ein Gewinnmaximum (vorausgesetzt, die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung ist erfüllt):

$$\varphi\,(x, t) \equiv R'(x) - C'(x) - t = 0$$

mit

$$\frac{d\,x\,(t)}{dt} = -\,\frac{\partial\varphi / \partial t}{\partial\varphi / \partial x} = \frac{1}{R''(x) - C''(x)}$$

Im vorliegenden Beispiel läßt sich *x(t)* explizit bestimmen:

$$x\,(t) = \frac{a - c - t}{2\,b} \quad , \quad \frac{d\,x\,(t)}{d\,t} = -\,\frac{1}{2\,b}$$

Aus *T(t) = tx(t)* folgt

$$\frac{d\,T(t)}{d\,T} = x(t) + t\,\frac{d\,x(t)}{d\,t}$$

Bei einer Erhöhung von *t* ergeben sich zwei gegenläufige Effekte: einerseits erzielt der Fiskus bei gegebener Absatzmenge höhere Steuereinnahmen (dieser Effekt entspricht dem ersten Term); andererseits veranlaßt der höhere Steuersatz den Monopolisten, seine Absatzmenge zu reduzieren (dieser Effekt entspricht dem zweiten Term). Dadurch sinken bei gegebenem Steuersatz die Steuereinnahmen.

Der das Steueraufkommen maximierende Steuersatz *t** wird bestimmt durch

$$\frac{d\,T\,(t)}{d\,t} = \frac{a - c - t}{2\,b} - \frac{t}{2\,b} = 0$$

Er beträgt $t^* = (a - c)\,/\,2$.

Für $t = 0$ ist das Steueraufkommen Null. Daneben gibt es einen kritischen Wert $\bar{t} > 0$, bei dem die Steuereinnahmen gleichfalls Null werden:

$$T\,(\bar{t}) = \bar{t}\;x\,(\bar{t}) = 0 \quad \text{für} \quad \bar{t} > 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; x\,(\bar{t}) = 0$$

$$x\,(\bar{t}) = \frac{a - c - \bar{t}}{2\,b} = 0$$

$$\bar{t} = a - c$$

Für $0 < t < t^*$ überwiegt der das Steueraufkommen steigernde Effekt den das Steueraufkommen reduzierenden Effekt. Für $t^* < t < \bar{t}$ ist es umgekehrt. Für $t \geq \bar{t} = a - c$ lohnt es sich für den Monopolisten nicht, zu produzieren.

Annahmegemäß ist $t^0 < t^*$. Soll das Steueraufkommen steigen, muß der Staat den Steuersatz erhöhen. Wie oben gezeigt, hat dies zur Folge, daß der Monopolist seine Absatzmenge reduziert. Die geringere Menge kann er jedoch zu einem höheren Verbraucherpreis absetzen (die Preis-Absatzkurve hat einen fallenden Verlauf).

Lösung zu Aufgabe 4

a) Aus der Lagrange-Funktion

$$L = 2\,x_1 - \frac{1}{2}\,x_1^2 + x_2 + \lambda\,(I - p_1\,x_1 - x_2)$$

erhält man als notwendige Bedingungen für ein Maximum:

$$\begin{aligned}
&2 - x_1 - \lambda\,p_1 = 0\\
&1 - \lambda = 0\\
&I - p_1\,x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten zwei Gleichungen folgt:

$$\left(\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} =\right) 2 - x_1 = p_1$$

Die gewöhnliche Nachfragefunktion für Gut 1 lautet daher

$$x_1 = 2 - p_1$$

Einsetzen in die Budgetbeschränkung ergibt die gewöhnliche Nachfragefunktion für Gut 2:

$$x_2 = I - p_1\,x_1 = I - p_1\,(2 - p_1)$$

Die indirekte Nutzenfunktion $U = V\,(p_1, 1, I)$ erhält man durch Einsetzen der gewöhnlichen Nachfragefunktionen in die direkte Nutzenfunktion:

$$\begin{aligned}
U &= 2\,(2 - p_1) - \frac{1}{2}\,(2 - p_1)^2 + I - p_1\,(2 - p_1)\\
&= (2 - p_1)\,(2 - 1 + \frac{1}{2}\,p_1 - p_1) + I\\
&= 2 - 2\,p_1 + \frac{1}{2}\,p_1^2 + I
\end{aligned}$$

Auflösung dieser Gleichung nach I ergibt die Ausgabenfunktion

$$E\,(p_1, 1, U) = U - (2 - 2\,p_1 + \frac{1}{2}\,p_1^2)$$

Die kompensierte Nachfragefunktion für Gut 1 ist gleich der ersten Ableitung der Ausgabenfunktion nach p_1:

$$x_1^+\,(p_1) = \partial E\,(p_1, 1, U)\,/\,\partial p_1 = 2 - p_1$$

Um die kompensierte Nachfragefunktion für Gut 2 zu ermitteln, berücksichtigen wir, daß gilt:

$$p_1\, x_1^+ + x_2^+ = E\,(p_1{,}1{,}U) = U - (2 - 2\,p_1 + \frac{1}{2}\,p_1^2)$$

oder

$$x_2^+ = U - (2 - 2\,p_1 + \frac{1}{2}\,p_1^2) - p_1\, x_1^+$$

Einsetzen von $x_1^+ = 2 - p_1$ führt zu

$$\begin{aligned} x_2^+ &= U - (2 - 2\,p_1 + \frac{1}{2}\,p_1^2) - 2\,p_1 + p_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\,p_1^2 - 2 + U \end{aligned}$$

b) Zur Berechnung des Wertes der kompensierenden Variation verwenden wir die Formel

$$CV = E\,(p^0, U^0) - E\,(p^1, U^0)$$

wobei $p^0 = (1/4{,}1)$ und $p^1 = (1{,}1)$ ist. Für die hier vorliegende spezielle Form der Ausgabenfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} CV &= 2\,p_1^0 - \frac{1}{2}\,(p_1^0)^2 - 2\,p_1^1 + \frac{1}{2}\,(p_1^1)^2 \\ &= 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} - 2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 \\ &= -\frac{33}{32} \end{aligned}$$

Für die äquivalente Variation errechnet man

$$\begin{aligned} EV &= E\,(p^0, U^1) - E\,(p^1, U^1) \\ &= 2\,p_1^0 - \frac{1}{2}\,(p_1^0)^2 - 2\,p_1^1 + \frac{1}{2}\,(p_1^1)^2 = -\frac{33}{32} \end{aligned}$$

Wir stellen also fest, daß CV und EV übereinstimmen. Dieses Resultat stellt sich immer dann ein, wenn die Nutzenfunktion quasilinear ist, d.h. die Form $U = f\,(x_1) + x_2$ besitzt. In diesem Fall ist der vertikale Abstand zwischen zwei Indifferenzkurven unabhängig davon, an welcher Stelle er gemessen wird. Es spielt also keine Rolle, ob bei der Messung der Nutzendifferenz die Güterpreise vor oder nach Einführung der Steuer zugrunde gelegt werden.

c) Für die Änderung der Marshallschen Konsumentenrente errechnet man

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(p_1)\, dp_1 \\
&= \int_1^{1/4} \left(2 - p_1\right) dp_1 = 2\, p_1 - \frac{1}{2}\, p_1^2 \Big|_1^{1/4} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{33}{32}
\end{aligned}
$$

Es gilt also $\Delta S = CV = EV$. Bei der hier unterstellten quasilinearen Nutzenfunktion ist die Nachfrage nach Gut 1 unabhängig von der Höhe des Einkommens. Die Fläche unter der Nachfragekurve in den Grenzen p_1^0 und p_1^1 ist deshalb ein exaktes Maß des Nutzenverlustes, den der Konsument aufgrund der Steuer erfährt.

d) Die Zusatzlast wird angegeben durch

$$ZL = -\Delta S - T$$

wobei $T = (3/4) \cdot x_1^+ \,(p_1^1) = (3/3)\,(2-1) = 3/4$.
Daher ist

$$ZL = \frac{33}{32} - \frac{24}{32} = \frac{9}{32}$$

Lösung zu Aufgabe 5

a) Wir bezeichnen die Verbraucherpreise der Güter mit p_M^b und p_F^b und die Erzeugerpreise mit p_M und p_F. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
p_F^b &= p_F\,(1+t_F)\\
p_M^b &= p_M\,(1+t_M) = p_M\,(1+t_F+\alpha)
\end{aligned}
$$

Totales Differenzieren ergibt

$$
\begin{aligned}
d\,p_F^b &= (1+t_F)\,d\,p_F + p_F\,dt_F\\
d\,p_M^b &= (1+t_M)\,d\,p_M + p_M\,dt_M\\
&= (1+t_F+\alpha)\,d\,p_M + p_M\,(d\,t_M + d\,\alpha)
\end{aligned}
$$

In der Ausgangslage werden keine Steuern erhoben, so daß $t_M = t_F = \alpha = 0$. Verbraucher- und Erzeugerpreise stimmen also in der Ausgangssituation überein, d.h. $p_M^b = p_M$ und $p_F^b = p_F$. Da wir die Einführung „kleiner“ Steuern betrachten, können wir $d\,t_F$ und $d\,t_M$ durch t_F und t_M ersetzen. Damit vereinfachen sich die Gleichungen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
d\,p_F^b &= d\,p_F + p_F\,t_F\\
d\,p_M^b &= d\,p_M + p_M\,t_M = d\,p_M + p_M\,(t_F+\alpha)
\end{aligned}
$$

Für die relativen Änderungen, die wir durch ein „ $\wedge$ “ kennzeichnen, erhalten wir

$$
\frac{d\,p_F^b}{p_F^b} = \frac{d\,p_F}{p_F} + t_F
$$

$$
\frac{d\,p_M^b}{p_M^b} = \frac{d\,p_M}{p_M} + t_M = \frac{d\,p_M}{p_M} + t_F + \alpha
$$

oder

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_F^b &= \hat{p}_F + t_F\\
\hat{p}_M^b &= \hat{p}_M + t_M = \hat{p}_M + t_F + \alpha
\end{aligned}
$$

In einer geschlossenen Wirtschaft ohne Steuern werden die relativen Änderungen der Produktionsmengen *M* und *F*, des Faktorpreisverhältnisses *w/r* und des Güterpreisverhältnisses p_M / p_F durch folgendes Gleichungssystem bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{LM}\,\hat{M} + \lambda_{LF}\,\hat{F} - \delta_L\,(\hat{w}-\hat{r}) &= \hat{L}\\
\lambda_{KM}\,\hat{M} + \lambda_{KF}\,\hat{F} + \delta_K\,(\hat{w}-\hat{r}) &= \hat{K}\\
|\theta|(\hat{w}-\hat{r}) &= \hat{p}_M - \hat{p}_F
\end{aligned}
$$

$$\hat{M} - \hat{F} = -\sigma_D (\hat{p}_M - \hat{p}_F)$$

mit

$$\delta_L := \lambda_{LM}\, \theta_{KM}\, \sigma_M + \lambda_{LF}\, \theta_{KF}\, \sigma_F$$

$$\delta_K := \lambda_{KM}\, \theta_{LM}\, \sigma_M + \lambda_{KF}\, \theta_{LF}\, \sigma_F$$

$$\left|\theta\right| = \theta_{LM} - \theta_{LF} = \theta_{KF} - \theta_{KM}$$

Durch die Einführung der Mehrwertsteuer ändert sich nur die vierte Gleichung des obigen Gleichungssystems. Sie lautet jetzt

$$\hat{M} - \hat{F} = -\sigma_D (\hat{p}_M - \hat{p}_F) - \sigma_D\, \alpha$$

Die gesamten Faktorbestände sind konstant, so daß $\hat{L} = \hat{K} = 0$. Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung ergibt

$$(\lambda_{LM} - \lambda_{KM})\, \hat{M} + (\lambda_{LF} - \lambda_{KF})\, \hat{F} - (\delta_L + \delta_K)(w^* - r^*) = 0$$

oder

$$\left|\lambda\right| (\hat{M} - \hat{F}) - (\delta_L + \delta_K)(\hat{w} - \hat{r}) = 0$$

wobei $\left|\lambda\right| = \lambda_{LM} - \lambda_{KM} = \lambda_{KF} - \lambda_{LF}$. Das reduzierte System der „Änderungsgleichungen“ unter Berücksichtigung der Steuer besteht aus drei Gleichungen mit den Variablen $(\hat{M} - \hat{F})$, $(\hat{w} - \hat{r})$ und $(\hat{p}_M - \hat{p}_F)$. In Matrixform lautet es

$$\begin{bmatrix} \left|\lambda\right| & -(\delta_L + \delta_K) & 0 \\ 0 & -\left|\theta\right| & 1 \\ 1 & 0 & \sigma_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M} - \hat{F} \\ \hat{w} - \hat{r} \\ \hat{p}_M - \hat{p}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_D\, \alpha \end{bmatrix}$$

b) Wirkung auf die Verteilungsrelation

$$\hat{w} - \hat{r} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \left|\lambda\right| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sigma_D\, \alpha & \sigma_D \end{vmatrix} = \left|\lambda\right| \sigma_D\, \alpha / \Delta$$

wobei $\Delta = -(\delta_L + \delta_K) - \sigma_D \left|\lambda\right| \left|\theta\right| < 0$. Die Änderung des Faktorpreisverhältnisses und damit der Verteilungsrelation hängt von der relativen Faktorintensität der Sektoren ab. Falls der Sektor F relativ kapitalintensiv (arbeitsintensiv) produziert, ist $\left|\lambda\right| > (<) 0$, und die differenzierte Mehrwertsteuer bewirkt eine Senkung (Erhöhung) des Lohn-Zins-Verhältnisses.

Wirkung auf das Erzeugerpreisverhältnis

$$\hat{p}_M - \hat{p}_F = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} |\lambda| & -(\delta_L + \delta_K) & 0 \\ 0 & -|\theta| & 0 \\ 1 & 0 & -\delta_D\,\alpha \end{vmatrix} = |\lambda|\,|\theta|\,\sigma_D\,\alpha\,/\,\Delta < 0$$

Das Verhältnis der Erzeugerpreise, $p_M \,/\, p_F$, sinkt.

Wirkung auf das Verbraucherpreisverhältnis

$$\begin{aligned} \hat{p}_M^b - \hat{p}_F^b &= \hat{p}_M - \hat{p}_F + \alpha \\ &= \frac{1}{\Delta}\left\{\alpha\,\Delta + |\lambda|\,|\theta|\,\sigma_D\,\alpha\right\} = -\alpha\,(\delta_L + \delta_K)\,/\,\Delta > 0 \end{aligned}$$

Das Verhältnis der Verbraucherpreise, $p_M^b \,/\, p_F^b$, steigt.

Wirkung auf die Produktionsstruktur

$$\hat{M} - \hat{F} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & -(\delta_L + \delta_K) & 0 \\ 0 & -|\theta| & 1 \\ -\delta_D\,\alpha & 0 & \sigma_D \end{vmatrix} = \sigma_D\,\alpha\,(\delta_L + \delta)\,/\,\Delta < 0$$

c) Interpretation der Ergebnisse

Die Einführung der differenzierten Mehrwertsteuer bewirkt, daß sich Gut *M* im Verhältnis zum Gut *F* für die Verbraucher verteuert. Sie fragen daher im Verhältnis zum Gut *F* weniger vom Gut *M* nach. In einer geschlossenen Wirtschaft ist im Gleichgewicht die nachgefragte gleich der produzierten Menge eines Gutes. Folglich sinkt das Verhältnis der produzierten Menge von *M* zur produzierten Menge von *F*. Die Faktorbestände sind konstant und vollbeschäftigt. *M/F* kann daher nur sinken, wenn vom Gut *M* absolut weniger und vom Gut *F* absolut mehr produziert wird. Diese Umstrukturierung der Produktion kann nur erfolgen, wenn der Erzeugerpreis des Industriegutes im Verhältnis zum Erzeugerpreis des Agrargutes sinkt.

Die Änderung des Faktorpreisverhältnisses hängt von der relativen Faktorintensität der Sektoren ab. Angenommen, Sektor *F* produziere relativ kapitalintensiv. Dann wird bei einer Produktionsausdehnung des Sektors *F* relativ viel Kapital zusätzlich nachgefragt. Andererseits wird durch die Produktionseinschränkung im Sektor *M* relativ wenig Kapital freigesetzt. Die Folge ist eine relative Verknappung des Faktors Kapital, und dies erklärt, weshalb das Lohn-Zins-Verhältnis in diesem Fall sinkt.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Es sei w_b der Bruttolohnsatz, *t* der Steuersatz und *w* der Nettolohnsatz, den die Arbeitnehmer ausbezahlt bekommen. Im Fall einer Wertsteuer gilt:

$$w_b = w(1+t)$$
$$dw_b = (1+t)\,dw + w\,d\,t$$
$$\frac{dw_b}{w_b} = \frac{dw}{w} + \frac{dt}{1+t}$$

Für den Fall, daß die Steuer eingeführt wird, folgt

$$\hat{w}_b = \hat{w} + dt$$

Die Produzenten orientieren sich bei ihrer Faktornachfrage am Verhältnis des Bruttolohnsatzes zum Preis der Kapitalnutzung, w_b / r. Für die relative Änderung des Verhältnisses der Inputkoeffizienten, a_{KM} / a_{LM}, im Sektor *M* erhalten wir

$$\hat{a}_{KM} - \hat{a}_{LM} = \sigma_M\,(\hat{w} + dt - \hat{r})$$

oder

$$\hat{a}_{KM} = \sigma_M\,(\hat{w} + dt - \hat{r}) + \hat{a}_{LM}$$

Es gilt

$$\theta_{LM}\,\hat{a}_{LM} + \theta_{KM}\,\hat{a}_{KM} = 0$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks für $\hat{a}_{KM}$ ergibt sich

$$\theta_{LM}\,\hat{a}_{LM} + \theta_{KM}\left[\sigma_M\,(\hat{w} - \hat{r} + dt) + \hat{a}_{LM}\right] = 0$$

oder

$$\hat{a}_{LM} = -\theta_{KM}\,\sigma_M\,(\hat{w} - \hat{r}) - \theta_{KM}\,\sigma_M\,dt$$

Für $\hat{a}_{KM}$ erhält man

$$\hat{a}_{KM} = \sigma_M\,(\hat{w} - \hat{r} + dt) - \theta_{KM}\,\sigma_M\,(\hat{w} - \hat{r} + dt)$$
$$= \theta_{LM}\,\sigma_M\,(\hat{w} - \hat{r}) + \theta_{LM}\,\sigma_M\,dt$$

Analog berechnen wir

$$\hat{a}_{LF} = -\theta_{KF}\,\sigma_F\,(\hat{w} - \hat{r}) - \theta_{KF}\,\sigma_F\,dt$$

$$\hat{a}_{KF} = \theta_{LF}\,\sigma_F\,(\hat{w} - \hat{r}) + \theta_{LF}\,\sigma_F\,dt$$

Einsetzen der Ausdrücke für $\hat{a}_{ij}$ in die differenzierten Vollbeschäftigungsbedingungen ergibt für konstante Faktorbestände $(\hat{L} = \hat{K} = 0)$:

$$\lambda_{LM}\ \hat{M} + \lambda_{LF}\ \hat{F} - \delta_L\ (\hat{w} - \hat{r}) = \delta_L\ dt$$

$$\lambda_{KM}\ \hat{M} + \lambda_{KF}\ \hat{F} + \delta_K\ (\hat{w} - \hat{r}) = -\delta_K\ dt$$

und

$$\left|\lambda\right| (\hat{M} - \hat{F}) - (\delta_L + \delta_K)(\hat{w} - \hat{r}) = (\delta_L + \delta_K)\ dt$$

Die differenzierten Nullgewinnbedingungen ändern sich durch die Lohnsteuer wie folgt:

$$\theta_{LM}\ (\hat{w} + dt) + \theta_{KM}\ \hat{r} = \hat{p}_M$$

$$\theta_{LF}\ (\hat{w} + dt) + \theta_{KF}\ \hat{r} = \hat{p}_F$$

Daher

$$\hat{p}_M - \hat{p}_F - \left|\theta\right|(\hat{w} - \hat{r}) = \left|\theta\right| dt$$

Die „Nachfragebeziehung“ ändert sich durch die Lohnsteuer nicht. Wir erhalten somit das folgende Gleichungssystem in den Variablen $\hat{M} - \hat{F}$, $\hat{w} - \hat{r}$ und $\hat{p}_M - \hat{p}_F$

$$\begin{bmatrix} \left|\lambda\right| & -(\delta_L + \delta_K) & 0 \\ 0 & -\left|\theta\right| & 1 \\ 1 & 0 & \sigma_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{M} - \hat{F} \\ \hat{w} - \hat{r} \\ \hat{p}_M - \hat{p}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\delta_L + \delta_K)\, dt \\ \left|\theta\right| dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wirkung auf das Faktorpreisverhältnis

$$\hat{w} - \hat{r} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \left|\lambda\right| & (\delta_L + \delta_K)\, dt & 0 \\ 0 & \left|\theta\right| dt & 1 \\ 1 & 0 & \sigma_D \end{vmatrix}$$

Mit $\Delta = -(\delta_L + \delta_K) - \sigma_D \left|\lambda\right| \left|\theta\right|$ folgt

$$\hat{w} - \hat{r} = (1/\Delta)\left[\delta_L + \delta_K + \sigma_D \left|\lambda\right| \left|\theta\right|\right] dt = -dt$$

Die Besteuerung des Faktors Arbeit in beiden Sektoren mit gleichem Satz bewirkt eine Senkung des Lohn-Zins-Verhältnisses um -*dt*.