Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

a) Für eine Stichprobe von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ berechnen Sie die Kovarianz $Cov(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X})$ für $i \neq j$. Es sei $Var(X_i) = Var(X_j) = \sigma^2$.

b) Zeigen Sie noch einmal, dass $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$ gilt. Das ist die Zentralitätseigenschaft des Mittelwertes, die Sie aus der Veranstaltung Statistik kennen.

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse in a) und b) im Zusammenhang. Erläutern Sie dabei die Aussage, dass bei der Schätzung der Stichprobenvarianz ein Freiheitsgrad „verloren geht“.

d) Gilt die Aussage in c) auch, wenn der Erwartungswert von X_i bekannt ist und nicht geschätzt werden muss?

Aufgabe 2:

Ein Hersteller von Autoteilen produziert eine Serie von $N = 1000$ Teilen. Zur Qualitätskontrolle werden der Serie eine Stichprobe von $n = 20$ Stück entnommen, wobei in der Stichprobe ein Mittelwert von $\overline{x} = 30$mm gemessen wurde. Die Standardabweichung der Grundgesamtheit σ_X ist bekannt und beträgt 4. Außerdem ist die Größe der Autoteile in der Grundgesamtheit normalverteilt.

a) Berechnen Sie das 95%-Konfidenzintervall in dem der unbekannte Erwartungswert μ der Grundgesamtheit liegt.

b) Als Endkontrolle wird nochmals eine etwas größere Stichprobe vom Umfang $n = 60$ entnommen. Dieses mal wird ein Mittelwert von $\overline{x} = 32$ mm gemessen. Wie berechnet sich jetzt das 95%-Konfidenzintervall?

Für den Fall, das der Hersteller den Erwartungswert bzw. Mittelwert der Grundgesamtheit nicht kennt, ist es vernünftiger anzunehmen, dass die Standardabweichung der Grundgesamtheit σ_X sowie die Verteilung der Größe ebenfalls unbekannt ist. Die Stichprobe vom Umfang $n = 20$ Stück ergibt weiterhin einen Mittelwert von $\overline{x} = 30$ mm. Die Standardabweichung der Stichprobe ergibt $s = 3,5$.

c) Wie sieht jetzt das 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Grundgesamtheit aus?

d) Berechnen Sie das Konfidenzintervall, in dem der Erwartungswert mit 99% Wahrscheinlichkeit **höchstens** liegt. Der Stichprobenumfang ist $n = 65$.

e) Bei einer kleineren Serie von N = 50 Stück wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ entnommen. Berechnen sie das 99%-Konfidenzintervall.

Aufgabe 3:

Stichprobenverteilung. Das Merkmal X einer großen Grundgesamtheit habe die Häufigkeitsfunktion

$$h(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{für } x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus dieser Grundgesamtheit wird eine Zufallsstichprobe gezogen.

a) Geben Sie zahlenmäßig Mittelwert und Varianz der Grundgesamtheit an.

b) Geben Sie die Verteilung des Stichprobenmittelwertes $\overline{X}_2$ für einen Stichprobenumfang $n = 2$ vollständig an.

c) Berechnen Sie $E(\overline{X}_2)$ und $Var(\overline{X}_2)$ unter Verwendung dieser Verteilung.

d) Berechnen Sie dieselbe Varianz ohne explizite Verwendung dieser Verteilung.

e) Berechnen Sie $P(2,5 < \overline{X}_2 \leq 3,5)$für einen Stichprobenumfang von $n = 2$.

f) Berechnen Sie $P(2,5 < \overline{X}_{50} \leq 3,5)$ für einen Stichprobenumfang von $n = 50$ (Näherung).

(Aufgabe aus Schira, Kap. 14, Aufg. 14.2)

Aufgabe 4:

Stichprobenumfang. Der Mittelwert μ einer Normalverteilung mit der Varianz $\sigma^2 = 9$ soll geschätzt werden. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ bringt den Mittelwert 53,97.

a) Geben Sie ein 95% - Konfidenzintervall für μ an.

b) Wie groß müsste der Stichprobenmittelwert sein, damit das Intervall kürzer wird ?

c) Wie groß müsste der Stichprobenumfang genommen werden, damit man ein 95%-Konfidenzintervall der Länge 0,4 erhält?

d) Wie groß müsste der Stichprobenumfang sein, damit man ein 99%-Konfidenzintervall der Länge 0,4 erhält?

(Aufgabe aus Schira, Kap. 14, Aufg. 14.6)

Aufgabe 5:

Ein Wohnungsmakler vermittelte im Monat Mai insgesamt 26 Wohnungen. Der Makler macht sich statistische Aufzeichnungen über die Größe X jeder Wohnung in qm und die Kaltmiete Y in €. Aus den Aufzeichnungen berechnet er:

$$\overline{x} = 78 \qquad \overline{y} = 1160$$

$$\overline{x^2} = 6800 \qquad \overline{y^2} = 1080000 \quad \overline{xy} = 83200$$

Betrachten Sie diese 26 Wohnungen als Zufallsstichprobe aus der Grundgesamtheit der Wohnungen einer Stadt, wobei das Merkmal Wohnungsgröße als annähernd normalverteilt angesehen werden kann. Geben Sie eine Intervallschätzung zu einer Konfidenzwahrscheinlichkeit von $1 - \alpha = 95\%$

a) für die durchschnittliche Wohnungsgröße in der Stadt,

b) für die Varianz der Wohnungsgröße in der Stadt.

Kann die Annahme, die Aufzeichnungen des Maklers seien als eine Zufallsstichprobe aus den im Mai abgeschlossenen Mietverträgen der Stadt anzusehen, vertreten werden ?

(Aufgabe aus Schira, Kap. 14, Aufg. 14.11)

Aufgabe 6:

Value-at-Risk ist eine in der Praxis häufig angewendete Kennzahl zur Messung von Preisrisiken von Portfolios. Er gibt den Verlust (z.B. in Euro oder in Prozent) an, der mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (z.B. 95%) nicht überschritten wird. Aus Sicht der Statistik handelt es sich hierbei um die Punktschätzung des 5% Quantils der Gewinnverteilung multipliziert mit -1, bzw. des 95%-Quantils der Verlustverteilung.

a) Berechnen Sie den Value-at-Risk für ein Portfolio bestehend aus amerikanischen Wohnimmobilien im Zeitraum (1975Q3 - 2006Q2) mit dem Erwartungswert μ =5,988 und der Standardabweichung (Volatilität) σ = 2,015. Die Renditen waren in diesem Zeitraum normalverteilt.

b) Ein in der Praxis häufig gemachter Fehler ist die Annahme der Normalverteilung auch dann, wenn die Renditen in Wirklichkeit nicht normalverteilt sind, sondern eher durch eine t-Verteilung mit etwa 6 Freiheitsgraden beschrieben werden kann. Wie ändert sich dadurch das Ergebnis aus Teilaufgabe a)?