Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Grundgesamtheit und Stichprobe. Eine endliche Grundgesamtheit bestehe aus nur fünf Elementen, nämlich

$$2,3,4,5,6.$$

a) Berechnen Sie Mittelwert μ und Standardabweichung σ dieser Grundgesamtheit.

Aus dieser Grundgesamtheit werde eine zufällige Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang $n = 3$ Elementen gezogen. Die Stichprobe könnte zufällig $ST_1 = \{2, 3, 4\}$ sein; sie hätte dann den Stichprobenmittelwert $\bar{x}_1 = 3$ und die Standardabweichung $s_1 = \sqrt{2/3}$.

b) Geben Sie alle möglichen Stichproben zu den drei Elementen (ohne Berücksichtigung der Anordnung), die man aus dieser Grundgesamtheit ziehen könnte, explizit in einer Tabelle an.

c) Geben Sie in dieser Tabelle auch die zugehörigen Stichprobenmittelwerte $\bar{x}_1$ bis $\bar{x}_{10}$ und die Standardabweichungen s_1 bis s_{10} an.

Der Stichprobenmittelwert, den man aus dieser Grundgesamtheit erhält, liegt also zwischen den Werten 3 und 5 und ist vom Zufall abhängig.

d) Zeichnen Sie die Massenfunktionen des Stichprobenmittelwertes $\overline{X}$.

e) Berechnen Sie die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes. Vergleichen Sie ihn mit der Standardabweichung in der Grundgesamtheit.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 13; Aufg. 13.7)

Aufgabe 2:

Es liegt Ihnen eine Stichprobe des Umfangs n über das monatliche Einkommen y_i vor.

a) Wie schätzen Sie die Anteile p_1, p_2, p_3 der Personen, deren Einkommen bis € 1500,-, über € 1500,- bis € 3000,- und über € 3000,- beträgt? Definieren Sie präzise die den Anteilsschätzungen zugrundeliegenden bernoulliverteilten Zuvallsvariablen (Indikatorvariablen). Erläutern Sie den Zusammenhang zur Schätzung der empirischen Verteilungsfunktion.

b) Es seien $\hat{p}_1$,$\hat{p}_2$ und $\hat{p}_3$ die unter a) abgeleiteten Schätzer. Bestimmen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen der drei Schätzer.

c) Betrachten Sie den Schätzer $\tilde{p} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$.

   Was schätzen Sie hiermit? Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $\tilde{p}$. Was ist der Zusammenhang zwischen den Schätzern $\tilde{p}$ und $\hat{p}_3$?

d) Berechnen Sie die Kovarianzen $Cov(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$, $Cov(\hat{p}_1, \hat{p}_3)$ und $Cov(\hat{p}_2, \hat{p}_3)$.
   Erläutern Sie, warum die drei Kovarianzen alle negativ sind.

Aufgabe 3:

Gesucht wird der ML-Schätzer für den unbekannten Anteilswert p einer Grundgesamtheit. Es liegt eine Zufallsstichprobe vom Umfang n vor, in welcher x Elemente das fragliche dichotome Merkmal aufweisen.

a) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion. Erläutern Sie den Ausdruck. Warum unterscheidet sich der Ausdruck von der entsprechenden Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsvariable $Bi(n, p)$.

b) Logarithmieren Sie die Likelihoodfunktion und bestimmen Sie den Schätzer für p, der die logarithmierte Likelihoodfunktion maximiert. Warum erhalten Sie den gleichen Schätzer wie im Schira auf S.441, der die Likelihoodfunktion maximiert? Welchen Weg der Maximierung finden Sie einfacher?

(Schira, S.441, Beispiel [7])

Aufgabe 4:

Die Schiefe und die Kurtosis sind wichtige Kennzahlen der Verteilung der Zufallsvariablen X. Sie sind wie folgt definiert (Schira, S.293):

Schiefe: $$\gamma = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$$

Kurtosis: $$\kappa = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$$

Wie lassen sich die Schiefe und die Kurtosis mit Hilfe der Momentenmethode schätzen? Motivieren sie die gefundenen Schätzer.