

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:

Statistische Qualitätskontrolle. Eine Zulieferung von 100 000 Speicherchips wird mit Hilfe des folgenden statistischen Prüfplans geprüft. Man zieht eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 400$ und handelt wie folgt:

- Befinden sich 44 oder weniger schlechte Stücke in der Stichprobe, so wird die Lieferung angenommen.
- Befinden sich 51 oder mehr schlechte Stücke in der Stichprobe, so wird die Lieferung abgelehnt und zurückgesandt.
- Liegt die Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe zwischen 45 einschließlich und 50 einschließlich, so wird die ganze Lieferung überprüft (Totalkontrolle).

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten jedes dieser drei Fälle für eine Lieferung, die genau 10% defekte Chips enthält. Approximieren Sie dabei die relevante Verteilung durch die Normalverteilung und interpolieren Sie ggf. die Tabellenwerte.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.13)

Aufgabe 2:

Lotto/Hauptsatz. Betrachten Sie die historischen Lottozahlen in Tabelle 12.1 im Schira. Fertigen Sie eine Wertetabelle der empirischen Verteilungsfunktion $H_{9114}(x)$ aus den Zahlen dieser Tabelle an. Vergleichen Sie diese mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(x)$.

- Wie groß ist die größte Abweichung zwischen H und F , und an welcher Stelle ist sie zu finden?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 12; Aufg. 12.1)

Hinweis: Lösen Sie Aufgabenteil a) mit Excel.

Berücksichtigen Sie nun den zentralen Grenzwertsatz, und gehen Sie davon aus, dass angesichts des riesigen Stichprobenumfangs von $n = 9114$ der Stichprobenmittelwert normalverteilt ist.

- Welches sind die Parameter dieser Normalverteilung?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von $|25 - \bar{X}| \geq 1$
- Wie groß wäre $P(|25 - \bar{X}| \leq 0,5)$

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 12; Aufg. 12.7)

Aufgabe 3:

Stichprobenmittelwert. Die Verteilung eines metrischen Merkmals X in einer sehr großen Grundgesamtheit sei unbekannt. Jedoch wisse man, dass der Mittelwert 1700 sei und die Standardabweichung etwa 144 betrage. Nun ziehe man eine Stichprobe vom Umfang 200.

- Wie groß ist der Erwartungswert des Stichprobenmittelwerts?
- Wie groß ist die Standardabweichung des Stichprobenmittelwerts?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 12; Aufg. 12.2)

Aufgabe 4:

In einer Urne liegen 4 Kugeln mit der Aufschrift 10,12,14 und 16. Es wird eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 2$ unter Berücksichtigung der Anordnung gezogen.

- Wie lauten alle möglichen Stichproben für den Fall mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen?
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Stichprobenmittelwertes für beide Fälle und vergleichen Sie den Erwartungswert von \bar{X} mit dem Mittelwert der Grundgesamtheit.
- Berechnen Sie die Varianz des Mittelwertes für beide Fälle (Annahme: Varianz der Grundgesamtheit sei nicht bekannt).
- Überprüfen Sie, ob die Formeln zur Berechnung der Varianz des Mittelwertes stimmen (Annahme: Varianz der Grundgesamtheit ist bekannt).

Aufgabe 5:

Sie beobachten eine Stichprobe von 3029 Arbeitnehmer(inne)n in Deutschland, die 1747 Männer und 1282 Frauen umfasst. Unterstellen Sie, dass die Verdienste Y_m, Y_f in Euro für beide Geschlechter jeweils einer logarithmischen Normalverteilung folgen, wobei der Index m (f) für männlich (weiblich) steht. Als Stichprobenmittelwerte erhalten Sie:

$$\overline{\ln(y_m)} = 7,766 \text{ und } \overline{\ln(y_f)} = 7,099$$

Als Stichprobenvarianzen der logarithmierten Verdienste erhalten Sie:

$$s_m^2 = 0,3587 \text{ und } s_f^2 = 0,6104$$

Unterstellen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit diesen Parametern beschrieben werden können.

- Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Variationskoeffizient der geschlechtsspezifischen Verteilungen der Verdienste in Euro.
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann mehr als 7000 Euro verdient, sprich $P(Y_m > 7000)$? Wie hoch ist $P(Y_f > 7000)$?
- Bestimmen Sie das geometrische Mittel der geschlechtsspezifischen Verdienste.
- Bestimmen Sie das geometrische Mittel der Gesamtverteilung der Verdienste für beide Geschlechter. Können Sie auch den Erwartungswert dieser Verteilung bestimmen? Wenn ja, welchen Wert nimmt er an?
- Bestimmen Sie den Interquartilsabstand der geschlechtsspezifischen Verdienstverteilungen. Und zwar
 - in Logarithmenprozenten (Log-Punkten),
 - in Prozenten und
 - in Euro.Interpretieren Sie die Ergebnisse in Worten.

- f) Was ist der Unterschied in den Erwartungswerten der Verdienste der Geschlechter
- (i) in Euro und
 - (ii) in Logarithmenprozenten (Log-Punkten)?
- g) Was sind die Unterschiede in den Medianen und den oberen/unteren Quartilen der Verdienste der Geschlechter
- (i) in Euro und
 - (ii) in Logarithmenprozenten (Log-Punkten)?
- h) Interpretieren Sie die Ergebnisse in f) und g) im Hinblick auf die Struktur der geschlechtsspezifischen Verdienstunterschiede.