Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Gewichtskontrolle. Bei einer Gewichtskontrolle von 1-kg-Paketen wurde festgestellt, dass das Gewicht normalverteilt ist mit $\mu = 1,01$ und $\sigma = 0,02$.

a) Wieviel Prozent aller Pakete wiegen mindestens 1 kg?

b) Jenseits welchen Betrages befinden sich die 6% schwersten Pakete?

c) Wieviel % aller Pakete wiegen mindestens 1,020 kg?

d) Warum ist der erste Satz dieser Aufgabe mit Sicherheit falsch?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.10)

Aufgabe 2:

Eine normalverteilte stochastische Variable X habe den Erwartungswert $\mu = 18$ und die Standardabweichung $\sigma = 4$.

a) Die standardisierte Variable $Z = (X - 18)/4$ ist dann standardnormalverteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable Z zufällig in das Intervall von -1 bis +1 fällt? Bestimmen Sie

$$P(-1 < Z \leq +1) = P(-1 < (X - 18)/4 \leq +1).$$

b) Geben Sie das entsprechende Intervall an, in welches die Zufallsvariable X mit eben dieser Wahrscheinlichkeit fällt.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in ein Intervall von +10 bis +26 fällt? Bestimmen Sie

$$P(10 < X \leq 26).$$

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.11)

Aufgabe 3:

Zwei-Sigma-Intervall. Wieviel Prozent der Wahrscheinlichkeitsmasse liegt innerhalb eines Zwei-Sigma-Intervalls $\mu \pm 2\sigma$ um den Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X

a) normalverteilt ist mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

b) normalverteilt ist mit $\mu = 13$ und $\sigma = 4$

c) binominalverteilt ist mit $n = 8$ und $p = 0,2$

d) binominalverteilt ist mit $n = 16$ und $p = 0,5$

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.16)

Aufgabe 4:

Ihnen liegt eine Stichprobe der Größe n, $x_1,x_2,...,x_n$ vor.

a) Minimieren Sie die Funktion

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z)^2$$

bezüglich z. Prüfen Sie die Bedingung 2. Ordnung.

b) Unterstellen Sie, dass die Zufallsvariablen $X_1,...,X_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind und dass die Zufallsvariablen unabhängig sind. Bestimmen Sie die Randdichte f (x_i) und die gemeinsame Dichte f $(x_1,x_2,...,x_n)$.

c) Maximieren Sie die gemeinsame Dichte bezüglich μ. Warum erhalten Sie das gleiche Ergebnis wie in a)?
Hinweis: Logarithmieren Sie zunächst die gemeinsame Dichte. Warum verändert dies nicht das Ergebnis der Maximierung?

Aufgabe 5:

Haushaltseinkommen. Das mittlere Jahreseinkommen aller Haushalte in einer Großstadt beträgt 32600€ bei einer Standardabweichung von 6200€. Eine Zufallsstichprobe mit 400 Haushalten wird entnommen. Unterstellen Sie eine Normalverteilung für diese Aufgabe.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe ein mittleres Jahreseinkommen von über 32000€ vorzufinden?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Stichprobenmittelwert zwischen 32100€ und 33100€?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Stichprobenmittelwert zwischen 32350€ und 32950€?

d) Geben Sie, ohne zu rechnen oder statistische Tafeln zu benutzen, an, in welchem der folgenden drei Intervalle der Stichprobenmittelwert mit größerer Wahrscheinlichkeit liegen wird.

(1) 32100€- 32300€
(2) 32300€- 32500€
(3) 32500€- 32700€

e) Nun weist man Sie darauf hin, dass das Haushaltseinkommen sicher nicht normalverteilt ist, vielmehr eine deutliche Schiefe aufweist und stellt Ihre Ergebnisse zu a) bis d) in Frage. Wie begegnen Sie diesem Argument?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 12; Aufg. 12.5)