Aufgabe 1 *(von 7)* ***Punkte 15***

Der Gewinn beim Verkauf von Biogurken hängt gemäß der folgenden Gewinnfunktion von der Produktionsmengen $\boldsymbol{x}$ (in dt/Tag) ab:

$$G(x) = b\sqrt{x} - x^2 \quad ,$$

wobei $\boldsymbol{b}$ eine positive Konstante ist.

a) Besitzt diese Funktion Nullstellen? Wenn ja, an welcher Stelle?

b) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung dieser Gewinnfunktion.

c) Besitzt diese Gewinnfunktion relative Extrema? Wenn ja, an welcher Stelle befinden sie sich und welcher Art sind sie?

d) Gibt es einen Wendepunkt? (*Antwort kurz begründen*)

d) Skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

Aufgabe 2 *(von 7)* ***Punkte 16***

Die Gesamtkosten $\boldsymbol{K}$ (in €) einer Reinigungsfirma pro Tag sind abhängig von der Anzahl der Kunden $\boldsymbol{x}$ und der pro Tag zurückgelegten Wegstrecke $\boldsymbol{y}$ (in km):

$$K(x, y) = e^{y/b}\left(8x + \frac{200}{x}\right)$$

wobei $\boldsymbol{b}$ eine positive reelle Konstante ist.

a) Bestimmen und ***interpretieren*** Sie die Höhenlinie zum Kostenniveau 200 €.

b) Geben Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung an.

Setzen Sie für alle folgenden Teilaufgaben $\boldsymbol{b} = 40$, sowie $(x_R, y_R) = (10\ ,\ 30)$

c) Bestimmen und ***interpretieren*** Sie die partielle Ableitung der Kostenfunktion nach $\boldsymbol{x}$ an der Stelle $(x_R, y_R) = (10\ ,\ 30)$.

d) Um wie viel € steigen die Kosten näherungsweise, wenn die Kundenzahl um 2 steigt und sich die dabei zurückgelegte Wegstrecke um 3 km erhöht.

e) Bestimmen und ***interpretieren*** Sie die Kostenelastizität bezüglich der Wegstrecke an der Stelle $(x_R, y_R) = (10\ ,\ 30)$.

Aufgabe 3 *(von 7)* ***Punkte 19***

Für ein neu zu bauende Wellnessbad steht eine Fläche von 1156 m^2 zur Verfügung, die in die Bereiche Sauna (Fläche $\boldsymbol{x}$ m^2), Fitness (Fläche $\boldsymbol{y}$ m^2) und Baden (Fläche $\boldsymbol{z}$ m^2) aufgeteilt werden soll. Die Einnahmen pro Stunde der Öffnungszeiten lassen sich aus den Flächen mittels folgender Erlösfunktion ermitteln:

$$E(x,y,z) = 5\sqrt{x} + 6\sqrt{2y} + 8\sqrt{3z}$$

Die Gesamtfläche soll so in die drei Bereiche aufgeteilt werden, dass der Erlös pro Stunde Öffnungszeit maximal wird.

a) Geben Sie die Nebenbedingung an und stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

b) Geben Sie die notwendigen Bedingungen zur Maximierung der Erlösfunktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingung an.

c) Bestimmen Sie die optimalen Flächen für die drei Bereiche und den Wert $\boldsymbol{\lambda}$.

d) ***Interpretieren*** Sie den Wert $\boldsymbol{\lambda}$ sachbezogen.

Aufgabe 4 *(von 7)* ***Punkte 12***

Für die drei Bereiche eines Unternehmens ergeben sich für das vergangene Geschäftsjahr folgende Leistungen (in Mio €)

Abgebender Bereich	**Empfangender Bereich**				
	I	**II**	**II**	**Endprodukt**	**Gesamtoutput**
I	0	30	10	40	80
II	16	6	14	24	60
III	8	9	20	63	100

Hinweis: Nutzen Sie die Formelsammlung

Sie enthält die für Input-Output-Modelle benötigten Formeln.

a) Ermitteln Sie die Matrix der Produktionskoeffizienten $\boldsymbol{A}$ und ***interpretieren*** Sie den Produktionskoeffizienten $\boldsymbol{a}_{23}$.

Die Inverse $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ der Matrix $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ besitzt folgende Form:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{600}\begin{pmatrix} 699 & 415 & 160 \\ 174 & 790 & 160 \\ 120 & & 800 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den fehlenden Koeffizienten dieser Matrix.

c) Im folgenden Jahr soll ein Endprodukt von 70 im Bereich I, von 34 im Bereich II und von 56 im Bereich III auf den Markt gebracht werden (Angaben in Mio €). Welchen Gesamtoutput müssen die drei Bereiche dafür erbringen?

d) Vervollständigen Sie mithilfe der in **a)** ermittelten Produktionskoeffizienten die folgende Input-Output-Tabelle.

Um Folgefehler zu vermeiden, sind Endprodukt und Gesamtoutput gegenüber c) verändert worden.

Abgebender Bereich	**Empfangender Bereich**				
	I	**II**	**II**	**Endprodukt**	**Gesamtoutput**
I	0	50			150
II	30	10	28		
III		15		130	200

Aufgabe 5 *(von 7)* ***Punkte 12***

In einer Getränkefabrik werden Bier und Cola zur Herstellung von Dieselbier verwendet. Dazu werden täglich 20000 Liter Bier und 11000 Liter Cola geliefert und verarbeitet. Zur Optimierung der betrieblichen Prozesse Liefereingang, Lagerung und Verarbeitung sollen Produktionsvarianten gefunden werden, die den vollständigen Verbrauch der täglichen Liefermengen gewährleisten. Drei Mischungsverhältnisse haben sich bewährt, deren Mengenanteile in Prozent in der folgenden Tabelle angegeben sind:

	Mischung 1	**Mischung 2**	**Mischung 3**
Bier	80 %	60 %	50 %
Cola	20 %	40 %	50 %

Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

(1) $0{,}8\,x_1 + 0{,}6\,x_2 + 0{,}5\,x_3 = 20000$

(2) $0{,}2\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}5\,x_3 = 11000$

a) Was geben die Variablen x_1 , x_2 , x_3 hier an?

b) Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem nach dem ***Gaußschen Algorithmus***.

c) Geben Sie Lösungsmenge dieses Linearen Gleichungssystems an. Wie muss x_3 hier gewählt werden, um ökonomisch sinnvolle Lösungen zu erhalten?

d) Gibt es eine Lösung, bei der von Mischung 2 doppelt so viel hergestellt wird wie von Mischung 1? Wenn ja, geben Sie diese Lösung an.

Aufgabe 6 (von 7) **Punkte 13**

Ein Winzer stellt zwei Sorten Rotwein, ***Rubin*** (Menge y_1) und ***Pinot Noir*** (Menge y_2) aus den Rebsorten: Merlot, Pinotage und Cabernet Sauvignon her mit folgender Zusammensetzung:

Einsatzmengen der Rebsorten pro Liter Rotwein [in l]	**Weinsorte** *Rubin*	*Pinot Noir*	***Mindest**erntemenge*
Merlot	0,4	0,2	200 Liter
Pinotage	0,2	0,5	250 Liter
Cabernet Sauvignon	0,4	0,3	
Produktionskosten je Liter in €	1,5	1	

Cabernet Sauvignon baut der Winzer nicht selbst an, daher wird dieser hier außer Acht gelassen.

Daraus ergeben sich folgende Bedingungen:

(1) $0{,}4\,y_1 + 0{,}2\,y_2 \geq 200$

(2) $0{,}2\,y_1 + 0{,}5\,y_2 \geq 250$

Angesichts der Nachfrage seiner Kunden, soll höchstens doppelt so viel ***Rubin*** hergestellt werden wie ***Pinot Noir***. (*Bedingung (3)*)

Gesucht werden die Mengen der beiden Weinsorten, die mit den geringsten Produktionskosten herstellbar sind.

a) Geben Sie die dritte Bedingung und die Zielfunktion an.

b) Lösen Sie das Problem ***grafisch*** und kennzeichnen Sie dabei den zulässigen Bereich.

c) Welche Geraden schneiden sich im Optimum? Berechnen Sie die optimalen Mengen

d*) Der Winzer möchte die Produktionskosten der Weinsorte ***Rubin*** durch die Anschaffung einer neuen Maschine verringern. Die Kosten der anderen Weinsorte ändern sich dadurch nicht. Wie weit können sich die Produktionskosten der Sorte Rubin verringern, ohne dass dies Einfluss auf die optimalen Produktionsmengen hat?

e*) Bestimmen Sie die optimalen Produktionsmengen, wenn die Produktionskosten der Weinsorte ***Rubin*** stärker sinken als unter ***d*)*** ermittelt.

<u>Hinweis:</u> *Teilaufgaben d*) und e*) sind Zusatzaufgaben, für die es zusammen maximal 5 P gibt, die in der angegebenen Gesamtpunktzahl nicht berücksichtigt wurden.*

Aufgabe 7 (von 7) **Punkte 13**

Inzwischen hat der Winzer aus ***Aufgabe 6*** seine Anbaufläche vergrößert und baut auch Cabernet Sauvignon an, bei dem er eine Ernte von mindestens 300 Litern erwartet, während sich die erwartete Ernte bei Pinotage um 10 Liter verringert hat. Er beschließt daher, sein Rotweinsortiment um einen Wein ***Cabernet*** (Menge y_3) zu erweitern. Dieser soll zu 40 % aus der Rebsorte Pinotage und zu 60 % aus Cabernet Sauvignon bestehen.

Dabei soll von der Weinsorte Rubin höchsten so viel hergestellt werden wie von beiden anderen Sorten zusammen. (*Bedingung (4)*)

Daraus ergeben sich folgende Bedingungen:

(1) $0{,}4\,\boldsymbol{y}_1 + 0{,}2\,\boldsymbol{y}_2 \geq 200$

(2) $0{,}2\,\boldsymbol{y}_1 + 0{,}5\,\boldsymbol{y}_2 + 0{,}4\,\boldsymbol{y}_3 \geq 240$

(3) $0{,}4\,\boldsymbol{y}_1 + 0{,}3\,\boldsymbol{y}_2 + 0{,}6\,\boldsymbol{y}_3 \geq 300$

(4) $-\,\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3 \geq 0$

Die Produktionskosten der drei Rotweine liegen bei 1 € je Liter Rubin, 1,5 € je Liter Pinot Noir und 2 € je Liter Cabernet. Daraus ergibt sich folgende Kostenfunktion:

$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}_1 + 1{,}5\,\boldsymbol{y}_2 + 2\,\boldsymbol{y}_3$

a) Geben Sie die ***duale Maximierungsaufgabe*** zu diesem Minimierungsproblem an.

b) Machen Sie den *ersten Schritt* der ***Simplex-Methode*** zur Lösung der ***dualen Maximierungsaufgabe***.

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	G	

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	G	

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	G	

c) Ergänzen Sie das folgende Endtableau der dualen Maximierungsaufgabe:

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	G	
0	0,25	1	0	0,625	-1,25	1,875	0	2,5
1	0,875	0	0	0,9375	3,125	-2,1875	0	1,25
0	0,25	0	1	-0,375	0,75	-0,125	0	0,5
						125	1	

d) ***Interpretieren*** Sie den Wert der Schlupfvariablen v_2 sachbezogen.

Lösungen

Aufgabe 1 *Punkte 15*

$$G(x) = b\sqrt{x} - x^2 \qquad b > 0$$

a) $G(x) = b\sqrt{x} - x^2 = \sqrt{x}\left(b - x^{3/2}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{N1} = \underline{\mathbf{0}}$

$x^{3/2} = b \qquad \rightarrow \qquad x_{N2} = \underline{b^{2/3}}$

b) $G'(x) = \dfrac{b}{2\sqrt{x}} - 2x$ *2 P* $\qquad G''(x) = -\dfrac{b}{4x^{3/2}} - 2$

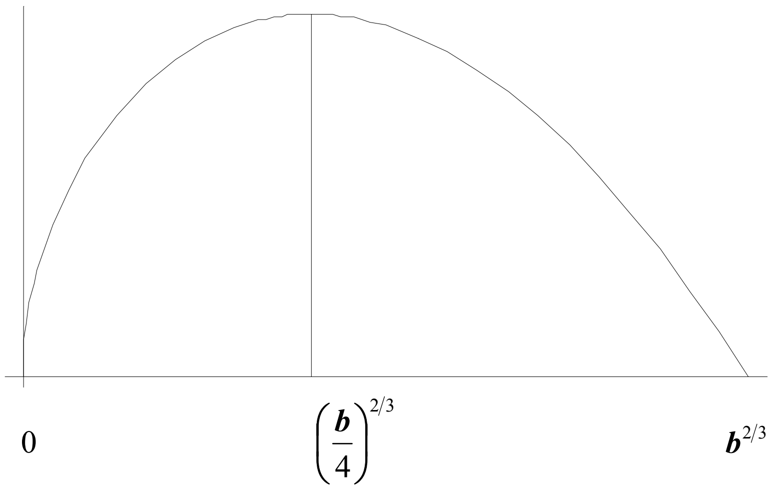
c) *notw. Bed.* $\qquad G'(x) = \dfrac{b}{2\sqrt{x}} - 2x = \dfrac{b - 4x^{3/2}}{2\sqrt{x}} = 0$

$\rightarrow \qquad b - 4x^{3/2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \underline{x_0 = \left(\dfrac{b}{4}\right)^{2/3}}$

hinr. Bed. $\qquad G''(x_0) = -\dfrac{b}{4x_0^{3/2}} - 2 < 0$ für $x_0 > 0 \qquad \rightarrow$ ***rel. Max*** *in* x_0

c) ***nein***, da $\qquad G''(x) = -\dfrac{b}{4x^{3/2}} - 2 < 0 \qquad$ für $x > 0$

d) *Skizze:*



Aufgabe 2 *Punkte 16*

$$K(x,y) = e^{y/b}\left(8x + \frac{200}{x}\right) \qquad b > 0$$

a) Höhenlinie zum Kostenniveau K_0 = 200 €

$$K_0 = e^{y/b}\left(8x + \frac{200}{x}\right) \qquad e^{y/b} = \frac{K_0}{\left(8x + \frac{200}{x}\right)}$$

$$\frac{y}{b} = ln\frac{K_0}{\left(8x+\frac{200}{x}\right)} \qquad\qquad \underline{y = b\,ln\frac{K_0}{\left(8x+\frac{200}{x}\right)}}$$

*Alle Wertepaare **(x,y)** von Kundenzahl **x** und Wegstrecke **y**, die dieser Gleichung genügen führen zu den gleichen Kosten K_0 = 200 €.*

b) partiellen Ableitungen

$$K'_x = e^{y/b}\left(8-\frac{200}{x^2}\right) \qquad 2\ P \qquad K'_y = \frac{1}{b}e^{y/b}\left(8x+\frac{200}{x}\right)$$

$b = 40$ $\quad (x_R, y_R) = (10\ ,\ 30)$

c) $K'_x(10{,}30) = e^{30/40}\left(8-\frac{200}{10^2}\right) = \underline{\mathbf{12{,}7}}$

Erhöht sich die Kundenzahl um 1 bei gleichbleibender Wegstrecke, so steigen die Kosten näherungsweise um 12,7 €.

d) $dx = 2$ $\qquad dy = 3$

$$K'_y(10{,}30) = \frac{1}{40}e^{30/40}\left(80+\frac{200}{10}\right) = \mathbf{5{,}29}$$

$$dK = K'_x(10{,}30)dx + K'_y(10{,}30)dy = 12{,}7 \cdot 2 + 5{,}29 \cdot 3 = \underline{\mathbf{41{,}27}}$$

e) $\varepsilon_K(y) = K'_y(x,y)\frac{y}{K(x,y)} = \frac{1}{b}e^{y/b}\left(8x+\frac{200}{x}\right)\frac{y}{e^{y/b}\left(8x+\frac{200}{x}\right)} = \frac{y}{b} = \underline{\mathbf{0{,}75}}$

Steigt die Wegstrecke um 1 % bei gleichbleibender Kundenzahl ausgehend von $(x_R, y_R) = (10\ ,\ 30)$, *so wachsen die Kosten durchschnittlich um 0,75 %.*

Aufgabe 3 — *Punkte 19*

$$E(x,y,z) = 5\sqrt{x} + 6\sqrt{2y} + 8\sqrt{3z}$$

a) Nebenbedingung: $x + y + z = 1156$

Lagrangefunktion: $F(x,y,z,\lambda) = 5\sqrt{x} + 6\sqrt{2y} + 8\sqrt{3z} + \lambda(1156 - x - y - z)$

b) notwendige Bedingungen

(1) $F'_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \lambda = 0$ $\qquad$ (2) $F'_y = \frac{6\cdot 2}{2\sqrt{2y}} - \lambda = \frac{6}{\sqrt{2y}} - \lambda = 0$

(3) $F'_z = \frac{8\cdot 3}{2\sqrt{3z}} - \lambda = \frac{12}{\sqrt{3z}} - \lambda = 0$ $\qquad$ (4) $F'_\lambda = 1156 - x - y - z = 0$

c) (1) $F'_x = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{5}{2\lambda} \quad \rightarrow \quad \underline{x = \frac{25}{4\lambda^2}}$

(2) $F'_y = \frac{6}{\sqrt{2y}} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2y} = \frac{6}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \underline{y = \frac{36}{2\lambda^2} = \frac{18}{\lambda^2}}$

(3) $F'_z = \frac{12}{\sqrt{3z}} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{3z} = \frac{12}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \underline{z = \frac{144}{3\lambda^2} = \frac{48}{\lambda^2}}$

(4) $F'_\lambda = 1156 - x - y - z = 1156 - \frac{25}{4\lambda^2} - \frac{18}{\lambda^2} - \frac{48}{\lambda^2} = 1156 - \frac{25 + 72 + 192}{4\lambda^2} = 0$

$1156\lambda^2 = \frac{289}{4} \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{289}{4 \cdot 1156} = 0{,}0625 \quad \rightarrow \quad \lambda = \sqrt{0{,}0625} = \underline{\mathbf{0{,}25}}$ *2 P*

$x = \frac{25}{4\lambda^2} = \underline{\mathbf{100}} \qquad y = \frac{18}{\lambda^2} = \underline{\mathbf{288}} \qquad z = \frac{48}{\lambda^2} = \underline{\mathbf{768}}$

d) *Wenn die verfügbare Gesamtfläche um 1 m^2 vergrößert wird, so erhöhen sich bei optimaler Aufteilung der Fläche auf die drei Bereiche die Einnahmen pro Stunde um 0,25 €.*

Aufgabe 4 *Punkte 12*

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 30/60 & 10/100 \\ 16/80 & 6/60 & 14/100 \\ 8/80 & 9/60 & 20/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}14 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

$a_{23} = 0{,}14$ *d.h. Bereich II liefert 15 % des Gesamtoutputs von Bereich III.* *2 P* **4 P**

b) $I - A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}9 & -0{,}14 \\ -0{,}1 & -0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix} \qquad (I-A)^{-1} = \frac{1}{600}\begin{pmatrix} 699 & 415 & 160 \\ 174 & 790 & 160 \\ 120 & z & 800 \end{pmatrix}$

$(I - A)(I - A)^{-1} = I$

$i_{12} = \frac{1}{600}(415 - 0{,}5 \cdot 790 - 0{,}1\, z) = 0$

$0{,}1\, z = 415 - 395 = 20 \quad \rightarrow \quad z = \underline{\mathbf{200}}$

c) $x = (I - A)^{-1} y = \frac{1}{600}\begin{pmatrix} 699 & 415 & 160 \\ 174 & 790 & 160 \\ 120 & 200 & 800 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 70 \\ 34 \\ 56 \end{pmatrix} = \frac{1}{600}\begin{pmatrix} 72000 \\ 48000 \\ 60000 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}}$

d) $x_{ij} = a_{ij} X_j$

Abgebender Bereich	**Empfangender Bereich**			**Endprodukt**	**Gesamtoutput**
	I	**II**	**II**		
I	0	50	***20***	***80***	150
II	30	10	28	***32***	***100***
III	***15***	15	***40***	130	200

Aufgabe 5 *Punkte 12*

(1) $0{,}8\,x_1 + 0{,}6\,x_2 + 0{,}5\,x_3 = 20000$

(2) $0{,}2\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}5\,x_3 = 11000$

a) x_1 , x_2 , x_3 geben die herstellbaren Mengen der 3 Mischungen in Litern an.

b) ***Gaußschen Algorithmus***

	0,8	0,6	0,5	20000
	0,2	0,4	0,5	11000
(1´)=(1)/0,8	1	0,75	0,625	25000
(2´)=(2)-0,25(1)	0	0,25	0,375	6000
(1´´)=(1´)-3(2´)	1	0	-0,5	7000
(2´´)=4(2´)	0	1	1,5	24000

c) $x_1 = 7000 + 0{,}5\,x_3$ $\quad x_2 = 24000 - 1{,}5\,x_3$ $\quad x_3$ ***beliebig***

Alternative: $x_3 = t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 24000 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 24000 - 1{,}5\,x_3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 24000 \geq 1{,}5\,x_3$

$16000 \geq x_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{0 \leq x_3 \leq 16000}$

d) $2\,x_1 = x_2 \quad \rightarrow \quad 2\,x_1 = 2(7000 + 0{,}5\,x_3) = 24000 - 1{,}5\,x_3$

$2{,}5\,x_3 = 10000 \quad x_3 = \mathbf{4000}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 24000 \\ 0 \end{pmatrix} + 4000 \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9000 \\ 18000 \\ 4000 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 *Punkte 13*

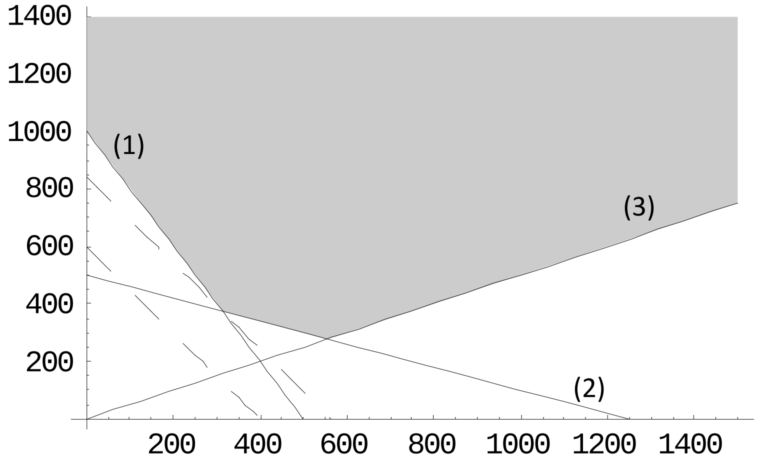
(1) $0{,}4\,y_1 + 0{,}2\,y_2 \geq 200$

(2) $0{,}2\,y_1 + 0{,}5\,y_2 \geq 250$

a) (3) $y_1 \leq 2\,y_2$

$K(y) = 1{,}5\,y_1 + y_2$

b) *grafische Lösung*



c) ***Optimum*** *im Schnittpunkt der Geraden* ***(1), (2)***

2(2) – (1) $\quad 0{,}8\,y_2 = 300 \qquad y_2 = 300/0{,}8 = \mathbf{375}$

$y_1 = \mathbf{312{,}5}$

d*) *Optimum bleibt bis die Niveaulinie* ***K(y)*** *parallel zur Geraden (2) ist.*

2(2) $\;0{,}4\,y_1 + y_2 = 500$

$K(y) = c\,y_1 + y_2 \qquad \mathbf{c \geq 0{,}4}$

e*) neues Optimum *im Schnittpunkt der Geraden* ***(2), (3)***

(2) $\rightarrow \quad 0{,}2 \cdot 2\; y_2 + 0{,}5\,y_2 = 0{,}9\,y_2 = 250 \qquad y_2 = 250/0{,}9 = \mathbf{277{,}78}$

$y_1 = 2 \cdot 277{,}78 = \mathbf{555{,}56}$

Aufgabe 7 — *Punkte 13*

(1) $0{,}4\,y_1 + 0{,}2\,y_2 \geq 200$
(2) $0{,}2\,y_1 + 0{,}5\,y_2 + 0{,}4\,y_3 \geq 240$
(3) $0{,}4\,y_1 + 0{,}3\,y_2 + 0{,}6\,y_3 \geq 300$
(4) $-y_1 + y_2 + y_3 \geq 0$

$K(y) = y_1 + 1{,}5\,y_2 + 2\,y_3$

a) ***duale Maximierungsaufgabe***

(1) $0{,}4\,x_1 + 0{,}2\,x_2 + 0{,}4\,x_3 - x_4 \leq 1$

(2) $0{,}2\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}3\,x_3 + x_4 \leq 1{,}5$

(3) $0{,}4\,x_2 + 0{,}6\,x_3 + x_4 \leq 2$

$G(x) = 200\,x_1 + 240\,x_2 + 300\,x_3$

b) ***duale Maximierungsaufgabe*** 1. Schritt

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	G	
0,4	0,2	0,4	-1	1	0	0	0	1
0,2	0,5	0,3	1	0	1	0	0	1,5
0	0,4	0,6	1	0	0	1	0	2
-200	-240	-300	0	0	0	0	1	0

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	G	
1	0,5	1	-2,5	2,5	0	0	0	2,5
-0,1	0,35	0	1,75	-0,75	1	0	0	0,75
-0,6	0,1	0	2,5	-1,5	0	1	0	0,5
100	-90	0	-750	750	0	0	1	750

c) Endtableau der dualen Maximierungsaufgabe:

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	G	
0	0,25	1	0	0,625	-1,25	1,875	0	2,5
1	0,875	0	0	0,9375	3,125	-2,1875	0	1,25
0	0,25	0	1	-0,375	0,75	-0,125	0	0,5
0	***10***	***0***	***0***	***375***	***250***	125	1	***1000***

NBV $v_1 = 0$ $v_3 = 0$ $v_4 = 0$ $y_3 = 125$

(1) $0{,}4\,y_1 + 0{,}2\,y_2 = 200$

(3) $0{,}4\,y_1 + 0{,}3\,y_2 + 0{,}6 \cdot 125 = 300 \quad \rightarrow \quad 0{,}4\,y_1 + 0{,}3\,y_2 = 300 - 75 = 225$

(4) $-y_1 + y_2 + 125 = 0 \quad \rightarrow \quad -y_1 + y_2 = -125$

(3) - (1) $\rightarrow \quad 0{,}1\,y_2 = 25 \quad \rightarrow \quad y_2 = 25/0{,}1 = \underline{\mathbf{250}}$

(4) $-y_1 + y_2 = -y_1 + 250 = -125 \quad \rightarrow \quad y_1 = \underline{\mathbf{375}}$ *1 P*

(2) $0{,}2\,y_1 + 0{,}5\,y_2 + 0{,}4\,y_3 + v_2 = 0{,}2 \cdot 375 + 0{,}5 \cdot 250 + 0{,}4 \cdot 125 - v_2 = 240$

$\rightarrow v_2 = 75 + 125 + 50 - 240 = \underline{\mathbf{10}}$

$K(y) = y_1 + 1{,}5\,y_2 + 2\,y_3 = 375 + 1{,}5 \cdot 250 + 2 \cdot 125 = \underline{\mathbf{1000}}$

d) $v_2 = 10$ *d.h. die Mindesterntemenge der Rebsorte Pinotage wird im Kostenoptimum um 10 Liter überschritten.*