

## Grundlagen der Finanzmathematik

### Prozentrechnung:

---

1. Ein Notebook, welches ursprünglich € 399,- kostet, wird um 5 % billiger angeboten. Um wie viel € ist das Notebook nun billiger?
2. Eine Marken-Jean, welche normalerweise € 149,- kostet, wird um € 49,- billiger angeboten. Um wie viel Prozent wurde der Preis reduziert?
3. Aus der Werbung eines Supermarktes: Diese Woche im Sonderangebot: „Eine Tafel Schokolade kostet nur € 0,88, das sind 20 % weniger als der reguläre Preis!“  
Was kostet die Schokolade regulär?  
In der nächsten Woche wird der Preis wieder so heraufgesetzt, dass sich der frühere Preis ergibt. Wie viel % macht diese Preiserhöhung aus?
4. Ein CD-Player kostet € 190,-. Der Händler möchte den Preis um 10 % heraufsetzen. Damit die Sache nicht so auffällt, beschließt er, den Preis zunächst um 5% zu erhöhen. Einige Wochen später soll der neue Preis dann nochmals um 5 % steigen. Ist der alte Preis damit tatsächlich um 10 % erhöht worden?
5. Bei der Nationalratswahl 2006 hatte die ÖVP 34,3 % der Stimmen, bei der Nationalratswahl 2008 hatte sie um 8,3 Prozentpunkte weniger.  
Um wie viel Prozent hatte die ÖVP bei der Wahl 2008 weniger Stimmen als bei der Wahl 2006?  
Um wie viel Prozent hatte die ÖVP bei der Wahl 2006 mehr Stimmen als 2008?

### Zinsrechnung:

---

1. Jemand hat sich vor 3 Jahren € 1.000,- zu 2 % p.a. geliehen. Heute muss er diesen Betrag inklusive Zinsen zurückzahlen. Wie hoch ist die Rückzahlung bei einfacher Zinsrechnung?
2. Am 21.03.2020 zahlte ein Sparer € 7.000,- auf sein Sparbuch ein. Welchen Endbetrag konnte er am 17.05.2020 beheben, wenn die Bank 3 % Zinsen p.a. gewährt?
3. Jemand zahlt folgende Beträge innerhalb eines Jahres auf das Sparbuch ein:

Datum	01.01.2020	01.02.2020	01.07.2020	01.09.2020
Betrag in €	250	140	450	90

- Welcher Betrag ist am 31.12.2020 auf dem Sparbuch, wenn die Bank 3,5 % Zinsen p.a. gewährt? Bearbeitungsgebühren werden nicht berücksichtigt!
4. Ein Sparer legt ein Kapital von € 1.000,- bei einer Bank zu 2 % Zinsen p.a. an. Welchen Betrag hat er bei zinseszinslicher Anlage nach 3 Jahren angespart?
  5. Ein Sparefroh zahlt zu Beginn eines Jahres einmalig € 7.000,- auf sein Sparbuch mit folgenden Konditionen ein:  
Zinssatz: 2,5 % p.a.  
Laufzeit: 5,5 Jahre

- Für welche Zinsberechnungsmethode würde sich der Sparefroh entscheiden, *könnte* er zwischen
- einfacher Zinsrechnung
  - Zinseszinsrechnung
  - gemischter Zinsrechnung wählen?
6. Ein Sparer will sich in 5 Jahren und 8 Monaten bei nachschüssiger Verzinsung ein Kapital von € 21.000,- für ein neues Auto angespart haben. Wie viel muss er heute dafür einmal einzahlen, wenn Sie
- einfache Zinsrechnung
  - Zinseszinsrechnung
  - gemischte Zinsrechnung unterstellen? Der Zinssatz beträgt 4,75 % p.a.
7. Jemand möchte € 620,- bei seiner Bank auf einem festverzinslichen Sparbuch mit 3 % p.a. nachschüssig anlegen. Nach welcher Veranlagungsdauer beträgt der Sparbetrag € 1.000,- bei
- einfacher Zinsrechnung,
  - Zinseszinsrechnung?
8. Ein Kapital von € 5.000,- wird zu 1,25 % p.a. angelegt. Wie hoch ist das Guthaben nach
- 4 Monaten,
  - 4 Jahren,
  - 44 Monaten?
9. Ein Sparer legt € 700,- 4 Jahre und 3 Monate zum nominellen Zinssatz von 4 % p.a. an. Wie hoch ist ihr Endkapital
- bei ganzjähriger Verzinsung,
  - bei vierteljährlicher Verzinsung,
  - bei monatlicher Verzinsung,
  - bei stetiger Verzinsung?
10. Ein Sparer legt € 6.000,- bei 1,25 % Jahreszinsen an. Die Zinsen werden vierteljährlich ausbezahlt und mitverzinst.  
Auf welchen Betrag ist das Kapital des Sparer nach Ablauf von 5 Jahren angewachsen? Welchem effektiven Jahreszins würde dies bei jährlicher Verzinsung entsprechen? Welches Endkapital würde sich ergeben, wenn die Zinsen jährlich gezahlt werden?
11. Welcher effektive Jahreszinssatz entspricht
- 6 % nominal p.a., monatliche Verzinsung
  - 8 % nominal p.a., vierteljährliche Verzinsung.
12. Ein Anfangskapital von 2.000,- € ist nach 6 Jahren auf € 4.000,- angewachsen. Welcher Zinssatz liegt dafür bei halbjährlicher Verzinsung zugrunde?
13. Jemand legt € 3.500,- bei einer Bank an, die ihm einen effektiven Jahreszins von 1,25 % verspricht. Es werden mit der Bank monatliche Auszahlung und Wiederanlage der Zinsen (mit Zinseszins) vereinbart:
- Wie hoch ist das Kapital des Anlegers bei der angeführten Verzinsung nach Ablauf von 5 Jahren?
  - Wie hoch ist der äquivalente (konforme) Monatszins?
  - Welches Endkapital ergibt sich nach 5 Jahren bei folgender Vereinbarung: nomineller Zinssatz von 1,25 % p.a., monatliche Verzinsung. Welcher effektive Jahreszins liegt zugrunde?

14. Wie viele volle Jahre muss man mindestens warten, bis bei einer monatlichen Verzinsung von 0,75 % das Startkapital von € 35.000,- auf mindestens € 105.000,- angewachsen ist?
15. Ein Kredit von € 50.000,- soll durch drei gleich große Zahlungen abgelöst werden, die nach 3, 5 und 6 Jahren am Jahresende geleistet werden sollen. Berechnen Sie diese Beträge bei einem Zinssatz von 5 % p.a.
16. Ein Kapital von € 30.000,- wird zu einem Jahreszinssatz von 1,75 % mit einer Bindungsdauer von 2 Jahren angelegt. Berechnen Sie den verfügbaren Kontostand am Ende der Bindungsdauer bei
  - a) jährlicher Verzinsung mit Zinseszins,
  - b) jährlicher Verzinsung ohne Zinseszins,
  - c) vierteljährlicher Verzinsung mit Zinseszins.
  - d) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für a) und c).
17. Jemand hat sich für 7 Jahre € 5.000,- zu einem Zinssatz von 4 % p.a. geliehen. Wie viel muss nun der Schuldner mehr zahlen, wenn vorschüssig anstelle nachschüssig gerechnet wird?

### **Rentenrechnung:**

---

18. Jemand schließt mit der Bank einen Ratensparvertrag ab. 3 Jahre lang zahlt er am Ende eines jeden Jahres € 100,- ein. Der Zinssatz beträgt 2 % p.a. Über welchen Betrag wird der Sparer am Ende des 3. Jahres verfügen?
19. Welchen Betrag muss man zu 2 % p.a. Zinseszinsen anlegen, um aus diesem Kapital 3 Jahre lang jeweils zum Jahresende € 100,- beheben zu können?
20. Ein Sparer beschließt an seinem 16. Geburtstag, dass er an seinem 70. Geburtstag € 1.000.000 durch jährlich nachschüssige Raten bei 4 % Zinsen gespart haben möchte. Wie hoch müssen die jährlichen, nachschüssigen Raten sein, damit er tatsächlich sein Ziel erreicht?
21. Ein Sparer legt jährlich nachschüssig genau € 5.469,10 an. Diese Einzahlungen werden mit 4 % p.a. verzinst. Wie viele Jahre wird es dauern, bis er € 1.000.000,- angespart hat?
22. Jemand schließt mit der Bank einen Ratensparvertrag ab. 3 Jahre lang zahlt er am Beginn eines jeden Jahres € 100,- ein. Der Zinssatz beträgt 2 % p.a. Über welchen Betrag wird der Sparer am Ende des 3. Jahres verfügen?
23. Welchen Betrag muss man zu 2 % p.a. Zinseszinsen anlegen, um aus diesem Kapital 3 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn € 100,- beziehen zu können?
24. Ein Heiratsschwindler ist sich noch nicht sicher, welche der folgenden „Bräute“ er tatsächlich heiraten soll. Er verfügt über folgende Informationen:  
  
Bräut 1: Sie hat 5 Jahre lang, jeweils zu Beginn eines Jahres, € 4.800,- auf ein Konto eingezahlt, das mit 3,25 % p.a. verzinst wurde. Über welchen Betrag verfügt sie heute (ein Jahr nach der letzten Ratenzahlung)?

Braut 2: Sie verfügt über eine jährliche Rente von € 4.000,-. Die Laufzeit beträgt 7 Jahre. Die erste Rate bekommt sie heute (zu Beginn dieses Jahres). Ihr Zinssatz beträgt 3,5 % p.a.

Welche Braut soll er nun heiraten?

(Anmerkung: Die beiden Damen sind gleich hübsch und gleich sympathisch!)

25. Sie schließen mit dem Bankinstitut A einen Ratensparvertrag ab und verpflichten sich, beginnend am 01.01.2020, jeweils am 1. Tag des Monats € 300,- einzuzahlen.
- Welches Kapital haben Sie nach einem Jahr angespart, wenn die Einzahlungen mit 4 % p.a. verzinst werden?
  - Das Bankinstitut B bietet eine monatliche Verzinsung zu 0,75 % pro Monat. Wie hoch wäre Ihr Guthaben nach zwei Jahren bei der Bank B?

26. Welchen Betrag müsste jemand am Konto haben, um 20 Jahre lang monatlich vorschüssig eine Rente von € 400,- beheben zu können? Rechnen Sie mit einem Jahreszinssatz von 5 %.

27. Herr Maier möchte seine Wohnung verkaufen. Zwei Interessenten bieten ihm folgende Angebote:

Angebot 1: Anzahlung von € 70.000,- , nach zwei Jahren erste Zahlung einer über 4 Jahre andauernden monatlich vorschüssigen Rente von € 2.000,-.

Angebot 2: Zahlung von € 100.000,- nach einem Jahr, nach weiteren 3 Jahren € 30.000,- , nach weiteren 2 Jahren € 40.000,-.

Welches Angebot sollte er akzeptieren? Rechnen Sie mit einem Jahreszinssatz von 4 %.

28. Jemand zahlt 20 Jahre lang jeweils zu Beginn eines Jahres € 750,- auf ein mit 3,75 % p.a. verzinstes Konto ein. Nach Ablauf der Ansparzeit wird das Guthaben vorschüssig in 15 gleich hohen Jahresraten ausbezahlt. Wie hoch sind diese Jahresraten?

29. Auf einem Sparbuch mit einer Verzinsung von 4 % p.a. werden 5 Jahre lang jeweils zu Jahresende Beträge einbezahlt, die jährlich um 150,- € erhöht werden. Die erste Einzahlung beträgt € 1.000,-.

- Wie groß ist der Sparbetrag am Ende des 5 Jahres?
- Wie hoch ist die Summe aller geleisteten Zahlungen?

30. Eine geometrisch fortschreitende Rente soll um 4 % jährlich erhöht werden. Der Rentenbetrag im ersten Jahr (nachsüssig) beträgt € 10.000,-. Die jährliche Verzinsung beträgt ebenfalls 4 %. Bestimmen Sie den Barwert bei einer Laufzeit von 6 Jahren!

31. Welchen Betrag benötigt man für eine 12 Jahre lang laufende nachsüssige Rente von € 7.000,- im ersten Jahr, mit einer Steigerung von 2 Prozent jährlich zur Inflationsabgeltung? Zinsfuß 5 % p.a.

32. Eine Firma bietet Mitarbeitern ab 55 im Zuge eines Personalabbauprogrammes mit Datum 1. Jänner entweder

A: eine Abfertigung in Höhe von € 50.000,- oder

B: eine jährliche nachsüssige Zusatzpension (Rente) von € 3.800,- lebenslang oder

C: eine jährliche, nachsüssige Zusatzpension, die, beginnend mit einem Betrag von € 2.600,- jedes Jahr um 3 Prozent zunimmt.

Welches Angebot ist für den ausscheidenden Mitarbeiter das günstigste, wenn mit einer Lebenserwartung von (mindestens) weiteren 22 Jahren, also 22 Zahlungen, rechnet? Rechnen Sie mit jährlicher Verzinsung von vier Prozent!

33. Eine Firma bietet Mitarbeitern ab 55 im Zuge eines Personalabbauprogrammes entweder
- eine Abfertigung in Höhe von € 40.000,- oder
  - eine jährliche vorschüssige Zusatzpension (Rente) von € 3.800,- lebenslang
- a) Welches Angebot ist für den ausscheidenden Mitarbeiter günstiger, wenn er mit einer Lebenserwartung von weiteren 20 Jahren rechnet?
- b) Ab welcher Anzahl von weiteren Lebensjahren ist die lebenslange Rente für den ausscheidenden Mitarbeiter vorteilhafter?
- Rechnen Sie mit einem Zinssatz von 5 % p.a.!
34. Für ein Grundstück bietet A € 50.000,- sofort und € 20.000,- in drei Jahren. B bietet sofort € 40.000,-. Wie viel hat B nach einem Jahr noch zu zahlen, damit sein Angebot dem von A gleichwertig ist, wenn der nominelle Jahreszinssatz 4 % bei halbjährlicher Verzinsung beträgt?
35. Ein Unternehmer holt für dieselbe Maschine bei zwei Verkäufern folgende Angebote ein:  
A: € 60.000,- sofort, 4 weitere Raten von € 10.000,- jeweils zu Ende des 1., 2., 3. und 4. Jahres.  
B: Fünf Jahresraten zu € 21.800,- zu Beginn des 1., 2., 3., 4. und 5. Jahres.  
Der Unternehmer legt der Vergleichsrechnung einen Zinssatz von 10 % zugrunde. Welches Angebot ist billiger?
36. Wie lange kann man jährlich nachschüssig eine Rente in der Höhe von € 2.000,- (€ 1.000,- ?) aus einem Guthaben von € 25.000,- bei einer jährlichen Verzinsung von 5 % beziehen?

### **Tilgungsrechnung:**

---

37. Eine Schuld von € 40.000,- soll in vier Jahren getilgt werden. Erstellen Sie die Tilgungspläne unter Annahme von 8 % jährlicher Verzinsung (dekursiv), und zwar sowohl für eine Tilgung in gleichen Raten als auch in gleichen Annuitäten!
38. Eine Schuld von € 80.000,- soll in genau 21 Jahren in gleichen Annuitäten getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 6,8 % p.a. Die Annuitäten sind jeweils zu Jahresende zu begleichen.
- a) Berechnen Sie die Höhe der Annuität.
- b) Geben Sie die letzte Zeile des Tilgungsplanes an.
39. Eine Schuld von € 800.000,- soll in gleichen Annuitäten von jeweils € 80.000,- getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 4,9 % p.a. Die Annuitäten sind jeweils zu Jahresende zu begleichen.
- a) Berechnen Sie die Laufzeit dieses Kredits sowie die Restschuld unmittelbar nach der letzten vollen Annuität.
- b) Geben Sie die erste, zweite und dritte Zeile des Tilgungsplanes an.
40. Ein Kredit wird in gleichen Annuitäten (jeweils zu Jahresende zahlbar) in Höhe von € 3.197,605 getilgt. Ende des zweiten Jahres verbleibt nach der zweiten Rückzahlung eine Restschuld von € 27.255,2197. Die Tilgung für das dritte Jahr beträgt € 1.017,187.
- a) Schreiben Sie die 3. Zeile des Tilgungsplanes vollständig an. Welcher Zinssatz liegt zugrunde?

- b) Berechnen Sie die ersten beiden Zeilen des Tilgungsplanes und ermitteln Sie die Anfangsschuld.
- c) Berechnen Sie die Laufzeit dieses Kredits.
- d) Welche Annuität würde eine Laufzeit von genau 8 Jahren ermöglichen?
41. Ein Kredit wird in gleichen Annuitäten von € 3.000,- zu jedem Jahresende getilgt. Die Verzinsung beträgt nominal 9 Prozent jährlich.
- a) Wie hoch war die Anfangsschuld, wie groß die erste Tilgungsrate, wenn die Laufzeit 8 Jahre beträgt?
- b) Die Rückzahlung soll von nun aber monatlich, jeweils zu Monatsbeginn, erfolgen. Wie viel muss der Schuldner jeden Monatsanfang bezahlen? Rechnen Sie auch hier mit 9 % nominal p.a.
42. Eine Schuld von  $K_0$  wird in (jeweils zu Jahresende fälligen) gleichen Annuitäten von € 40.000,- getilgt. Der Zinssatz beträgt 8 % p.a. Drei derartige Zahlungen wurden schon beglichen. Die noch offene Restschuld beträgt 147.280,64 €.
- a) Berechnen Sie die noch verbleibende Laufzeit.
- b) Berechnen Sie die zu Beginn des letzten Jahres verbleibende Restschuld.
- c) Wie groß war die Anfangsschuld?
- d) Berechnen Sie den Tilgungsbetrag und die Restschuld am Ende des 10. Jahres, wenn die Annuität € 18.000,- beträgt. Wann ist die Schuld getilgt?
43. Eine Annuität in Höhe von € 6.000,- soll nun nicht erst zu Jahresende, sondern in vier gleich großen Quartalsraten, jeweils zu Ende des Vierteljahres, beglichen werden. Der nominale jährliche Zinsfuß beträgt 8 % p.a. Wie viel ist dann pro Quartal zu zahlen? Rechnen Sie mit anteiligen Zinsen je Quartal und einfacher Verzinsung!
44. Eine Schuld von  $K_0$  wird in jeweils zu Jahresende fälligen gleichen Annuitäten von € 5.191,277 getilgt. Der Zinssatz beträgt 8 % p.a. Der Schuldenstand nach Bezahlung der 12. Annuität beträgt noch  $K_{12} = 32.429,325$  €.
- a) Bestimmen Sie den Schuldenstand nach Bezahlung der 14. Annuität!
- b) Wie groß war die Anfangsschuld?
- c) Der Schuldner möchte die Restschuld von € 32.429,325 schneller tilgen, und zwar derart, dass er in nur 4 Jahren schuldenfrei ist. Welche Annuität ist dafür ab nun zu leisten?
45. Für ein Eigenheim haben Sie einen Kredit in Höhe von € 130.000,- aufgenommen. Dieser Kredit soll in gleichen Annuitäten in 21 Jahren getilgt werden, wobei die Tilgungszahlungen jeweils zu Jahresende fällig sind.
- Bestimmen Sie zum Zinssatz 8,75 % p.a.
- a) die Annuität
- b) die erste Tilgungszahlung
- c) die Restschuld nach der 10. Tilgungszahlung.